

# **Methoden zur elastischen und plastischen Modellierung von scheibenartig beanspruchten Holztafeln**

Von der  
Fakultät Architektur, Bauingenieurwesen und Umweltwissenschaften  
der Technischen Universität Carolo-Wilhelmina  
zu Braunschweig

zur Erlangung des Grades eines  
**Doktoringenieurs (Dr.-Ing.)**  
genehmigte

## **Dissertation**

von  
Christoph Hall  
geboren am 6. April 1978  
aus Bonn

Eingereicht am 04. Mai 2012

Disputation am 25. Mai 2012

Berichterstatter Prof. Dr.-Ing. Martin H. Kessel  
Prof. Dr.-Ing. Bohumil Kasal

2012



## Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner wissenschaftlichen Tätigkeit am Institut für Baukonstruktion und Holzbau an der Technischen Universität Braunschweig zwischen Oktober 2007 und Mai 2012.

Meinem Doktorvater Herrn Prof. Dr.-Ing. Martin H. Kessel danke ich für die konstruktive und vertrauensvolle Zusammenarbeit und für seine engagierte Unterstützung meiner wissenschaftlichen Arbeit.

Mein Dank gilt ebenfalls Herrn Prof. Dr.-Ing. Bohumil Kasal für die Übernahme des Koreferats. Dem Vorsitzenden der Prüfungskommission Herrn Prof. Dr.-Ing. Dieter Dinkler und dem Prüfer Herrn Prof. Dr. sc. techn. Klaus Thiele danke ich für ihr Mitwirken in der Prüfungskommission.

Sehr verbunden bin ich allen aktuellen und ehemaligen Mitarbeitern des Instituts für die konstruktiven fachlichen Diskussionen, die zahlreichen Anregungen und für die Erstellung der umfangreichen Zeichnungen.

Ein ganz besonderer Dank gebührt Herrn Dipl.-Ing. Theo Schönhoff. Er hat mich in tiefgreifenden fachlichen Diskussionen mit seinen wertvollen Anregungen und Ratschlägen unterstützt und wesentlich zum Entstehen dieser Arbeit beigetragen.

Nicht zuletzt danke ich meiner lieben Frau und meiner Familie für ihre fortwährende Unterstützung bei der Erstellung dieser Arbeit.

Braunschweig im November 2012

Christoph Hall

## Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung und Motivation.....	1
1.1	Holztafeln .....	1
1.2	Grenzen der Schubfeldmethode .....	3
1.3	Ziel dieser Arbeit.....	9
2	Physikalisch nichtlineares Verhalten von Holztafeln.....	11
2.1	Berücksichtigung von Plastizität im Holzbau.....	11
2.2	Fließgelenktheorie.....	13
2.2.1	Allgemeines zur Fließgelenktheorie im Stahlbau.....	13
2.2.2	Theoreme der Fließgelenktheorie und Eingrenzungssätze .....	14
2.3	Übertragung der Fließgelenktheorie auf den Holztafelbau.....	17
2.3.1	Problemstellung .....	17
2.3.2	Entwicklung der Fließverbundmethode.....	18
3	Fließverbundmethode für Holztafeln .....	19
3.1	Einleitung .....	19
3.2	Der Verbund von Rippen und Beplankung.....	20
3.3	Dehn- und biegestarke Rippen.....	27
3.4	Elastischer Grenzzustand mit dem Weggrößenverfahren.....	30
3.4.1	Modellierung des Verbundes mit resultierenden Steifigkeiten .....	30
3.4.2	Statisches Modell .....	37
3.4.3	Anwendung des Weggrößenverfahrens bei der Fließverbundmethode .....	38
3.4.4	Beispiel 1: Tafel mit starren Rippen als ideales Schubfeld.....	40
3.4.5	Beispiel 2: Tafel mit gelenkig verbundenen starren Rippen .....	43
3.4.6	Beispiel 3: Tafel mit starren Rippen ohne Zugverankerung .....	47
3.5	Plastischer Grenzzustand mit der Fließverbundmethode.....	51

---

3.5.1	Modellierung des Verbundes mit resultierenden Verbundbeanspruchbarkeiten .....	51
3.5.2	Beispiel 2: Tafel mit gelenkig verbundenen starren Rippen .....	56
3.5.3	Beispiel 3: Tafel mit starren Rippen ohne Zugverankerung .....	61
3.6	Fließverbundmethode und Schubfeldmethode .....	65
3.6.1	Untere Grenze des plastischen Grenzzustandes mittels Schubfeldmethode .....	65
3.6.2	Vor- und Nachteile der Schubfeldmethode .....	71
4	Stab-Verbund-Modell für Holztafeln .....	73
4.1	Allgemeines.....	73
4.2	Struktur des Stab-Verbund-Modells .....	75
4.3	Verbund von Rippen und Beplankung.....	76
4.4	VR-Element.....	77
4.4.1	Elementbeschreibung.....	77
4.4.2	Formfunktionen des elastischen VR-Elements.....	78
4.4.3	Steifigkeitsmatrix des elastischen VR-Elements.....	85
4.4.4	Steifigkeitsmatrix des VR-Elements mit teil- oder vollplastischem Verbund.....	88
4.4.5	Ersatzlasten des VR-Elements.....	94
4.5	VRV-Element.....	96
4.5.1	Elementbeschreibung.....	96
4.5.2	Formfunktionen des elastischen VRV-Elements.....	97
4.5.3	Steifigkeitsmatrix des elastischen VRV-Elements.....	102
4.5.4	Steifigkeitsmatrix des VRV-Elements mit teil- oder vollplastischem Verbund .....	104
4.5.5	Ersatzlasten des VRV-Elements .....	105
4.6	Modellierung der Beplankung.....	105
4.7	Druckkontakt zwischen den Rippen .....	108

---

4.8	Druckkontakt zwischen den Platten.....	110
4.9	Verankerung.....	110
4.10	Programmablaufplan zur iterativen numerischen Berechnung des plastischen Grenzzustandes von Holztafelkonstruktionen .....	112
4.11	Beispiele zur Anwendung des Stab-Verbund-Modells für Holztafeln .	116
4.11.1	Beispiel 1: Tafel als ideales Schubfeld.....	116
4.11.2	Beispiel 2: Tafel mit gelenkig verbundenen Rippen .....	120
4.11.3	Beispiel 3: Tafel ohne Zugverankerung .....	124
4.12	Vergleich der Beispielrechnungen aus den Kapiteln 3 und 4.....	129
5	Zusammenfassung und Ausblick.....	132
6	Literaturverzeichnis .....	135
7	Abbildungsverzeichnis .....	139
Anhang A	- Formfunktionen des VR- und des VRV-Elements.....	A-1
Anhang B	- Steifigkeitsmatrix des VR-Elements .....	B-1
Anhang C	- Steifigkeitsmatrix des VRV-Elements .....	C-1
Anhang D	- Tafel mit starren Rippen als ideales Schubfeld .....	D-1
Anhang E	- Tafel mit gelenkig verbundenen starren Rippen .....	E-1
Anhang F	- Tafel mit starren Rippen ohne Zugverankerung.....	F-1

## Bezeichnungen

### Geometrische Größen

$A$	Querschnittsfläche
$a_v$	Verbindungsmittelabstand
$d$	Verbindungsmitteldurchmesser
$I$	Flächenmoment 2. Grades (Flächenträgheitsmoment)
$\ell$	Verbundlänge, Tafellänge
$t$	Plattendicke
$u, w$	Verschiebungen
$u_{\text{inst}}$	Anfangsverschiebung eines Verbindungsmittels
$u_y$	Fließverschiebung eines Verbindungsmittels
$\varphi$	Verdrehung eines Knotens / einer Rippe gegenüber einem Beplankungsrand

### Steifigkeiten

$C_0$	resultierende Wegfedersteifigkeit im Schwerpunkt einer Verbindung parallel zur Rippenachse
$C_{90}$	resultierende Wegfedersteifigkeit im Schwerpunkt einer Verbindung senkrecht zur Rippenachse
$C_\varphi$	resultierende Drehfedersteifigkeit im Schwerpunkt einer Verbindung
$E$	Elastizitätsmodul
$K$	Verschiebungsmodul eines Verbindungsmittels
$K_{\text{ser}}$	Anfangsverschiebungsmodul eines Verbindungsmittels für den Nachweis im Grenzzustand der Gebrauchstauglichkeit
$K_t$	Steifigkeit einer Zugverankerung
$K_u$	Verschiebungsmodul eines Verbindungsmittels für den Nachweis im Grenzzustand der Tragfähigkeit

**Beanspruchungen, Spannungen**

$F_{\text{est}}$	geschätzte Höchstlast
$F_{\text{max}}$	Höchstlast
$F_{\text{ser}}$	Gebrauchslast
$M$	Biegemoment
$M_{\varphi,\text{el}}$	resultierendes Moment im Schwerpunkt eines Verbundes im elastischen Grenzzustand des Verbundes
$M_{\varphi,\text{pl}}$	resultierendes Moment im Schwerpunkt eines Verbundes im plastischen Grenzzustand des Verbundes
$N$	Normalkraft
$Q$	Querkraft
$s_0$	längenbezogene Verbundbeanspruchung parallel zum Beplankungsrand / zur Stabachse der Rippe
$s_{90}$	längenbezogene Verbundbeanspruchung senkrecht zum Beplankungsrand / zur Stabachse der Rippe
$s_{\text{res}}$	resultierende längenbezogene Verbundbeanspruchung
$S_{0,\text{el}}$	resultierende Verbundbeanspruchung parallel zur Rippenachse im Schwerpunkt des Verbundes im elastischen Grenzzustand des Verbundes
$S_{0,\text{pl}}$	resultierende Verbundbeanspruchung parallel zur Rippenachse im Schwerpunkt des Verbundes im plastischen Grenzzustand des Verbundes
$S_{90,\text{el}}$	resultierende Verbundbeanspruchung senkrecht zur Rippenachse im Schwerpunkt des Verbundes im elastischen Grenzzustand des Verbundes
$S_{90,\text{pl}}$	resultierende Verbundbeanspruchung senkrecht zur Rippenachse im Schwerpunkt des Verbundes im plastischen Grenzzustand des Verbundes



**Beanspruchbarkeiten**

$f_v$	längenbezogene Verbundbeanspruchbarkeit
$R$	Beanspruchbarkeit eines Verbindungsmittels
$R_{0,pl}$	resultierende Verbundbeanspruchbarkeit parallel zur Rippenachse im Schwerpunkt des Verbundes im plastischen Grenzzustand des Verbundes
$R_{90,pl}$	resultierende Verbundbeanspruchbarkeit senkrecht zur Rippenachse im Schwerpunkt des Verbundes im plastischen Grenzzustand des Verbundes
$R_{\varphi,pl}$	resultierende Verbundbeanspruchbarkeit im Schwerpunkt eines Verbundes bei alleiniger Beanspruchung durch ein Moment im plastischen Grenzzustand des Verbundes

**Matrizen und Vektoren**

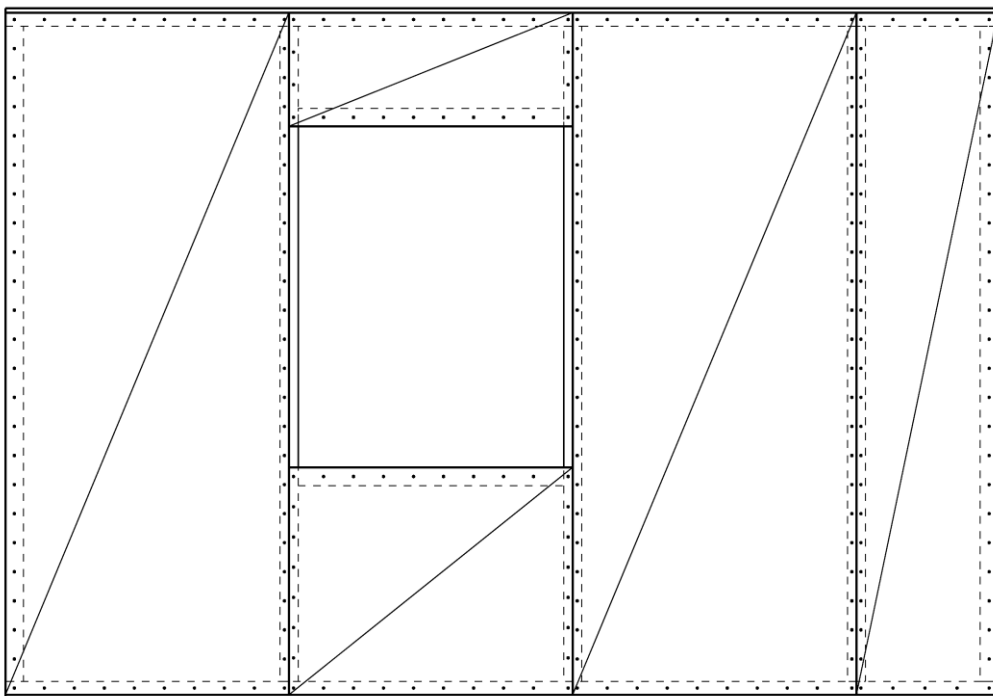
$K_{VR}$	Steifigkeitsmatrix des VR-Elements
$K_{VRV}$	Steifigkeitsmatrix des VRV-Elements
$p$	Lastvektor
$v$	Vektor der Knotenweggrößen



# 1 Einleitung und Motivation

## 1.1 Holztafeln

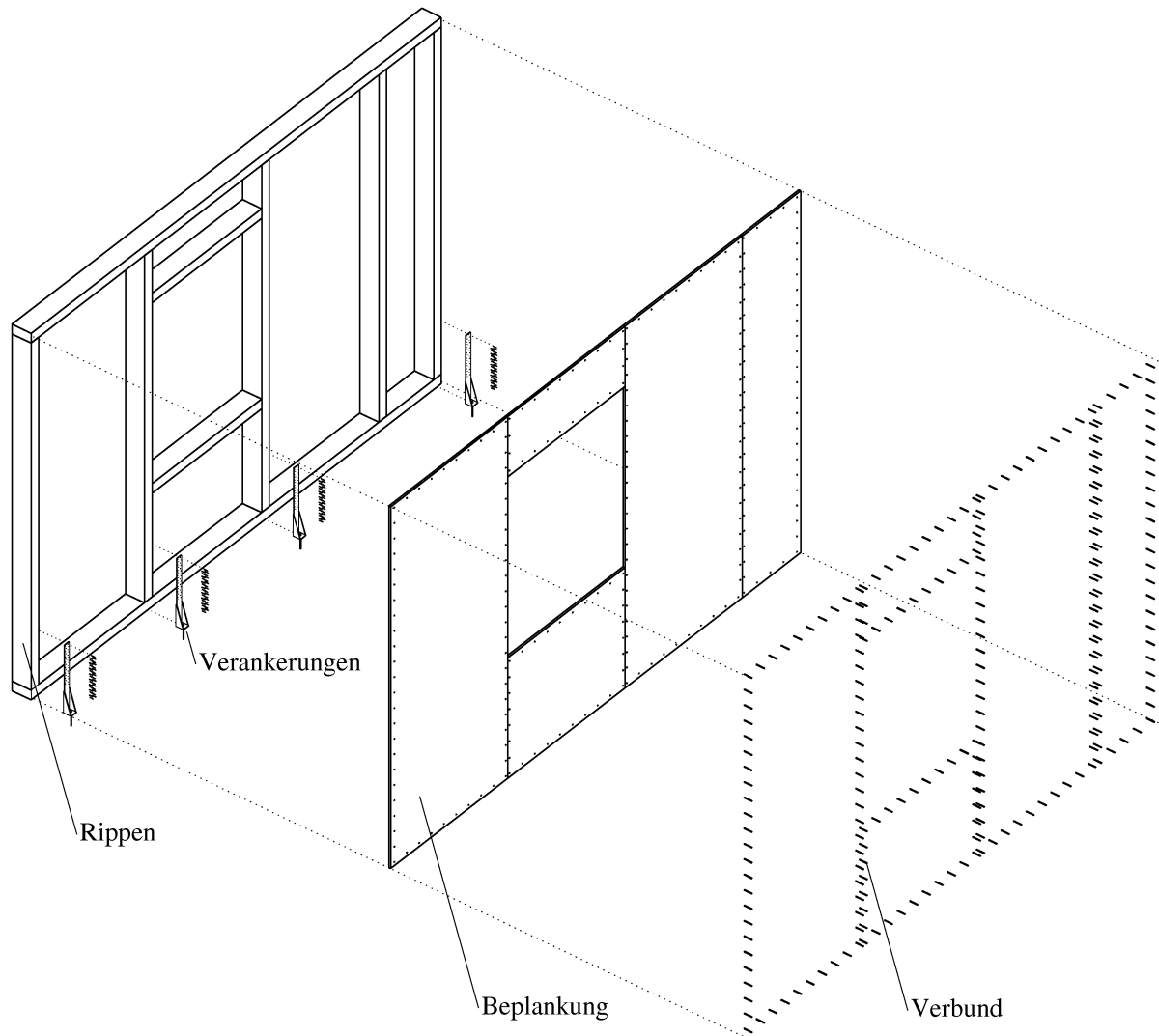
Holztafeln, wie die in Bild 1-1 dargestellte Wandtafel, bestehen aus Holzrippen, einer Beplankung und ihrem duktilen Verbund durch Nägel, Klammern oder Schrauben. Die statisch wirksame Beplankung aus Holzwerkstoff- oder Gipswerkstoffplatten kann einseitig oder beidseitig angeordnet sein. Erst das Zusammenwirken all ihrer Teile macht Holztafelkonstruktionen zu Tragwerken, die sowohl Beanspruchungen in ihrer Ebene im statischen Sinne als Scheibe als auch senkrecht zu ihrer Ebene als Platte abtragen. Die Wirtschaftlichkeit der Holztafelbauart resultiert neben einem hohen Vorfertigungsgrad nicht zuletzt aus den einfachen Verbindungen der Bauteile und einem optimierten Materialeinsatz durch schlanke Rippen und dünne Platten, die sich gegenseitig aussteifen. So wird das Beulen der Platten konstruktionsbedingt durch die Rippen behindert, während die Platten der Knickaussteifung der Rippen in der Tafelebene dienen.



**Bild 1-1:** Ansicht einer Wandtafel mit Fensteröffnung

Tragmodelle zur statischen Berechnung von Holztafeln sind u. a. aufgrund der Vielzahl von Bauteilen und Verbindungsmitteln, wie sie in Bild 1-2 exempla-

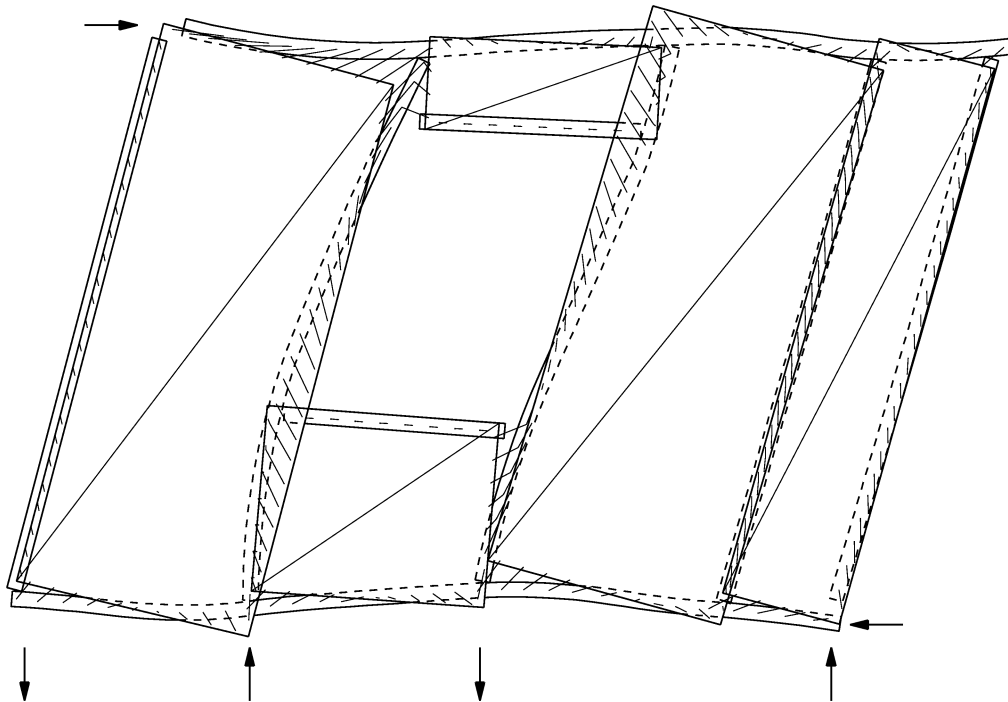
risch für eine Wandtafel dargestellt sind, vielfach statisch unbestimmt. Daher haben die Steifigkeiten der Bauteile und ihrer Verbindungen einen nicht vernachlässigbaren Einfluss auf die Größe ihrer Beanspruchungen.



**Bild 1-2:** Explosionsdarstellung einer einseitig beplankten Wandtafel

Die Berechnung der Beanspruchungen und der Verformungen von Holztafelkonstruktionen unter Berücksichtigung des plastisch duktilen Tragverhaltens der Zugverankerungen und des Verbundes zwischen Holzrippen und Beplankung sowie des elastisch spröden Verhaltens der Holzrippen und der Beplankung ist bisher nur mit aufwendigen Finite-Elemente-Analysen möglich. Die Verformungsfigur in Bild 1-3 beispielsweise basiert auf den Ergebnissen einer physikalisch nichtlinearen FE-Analyse mit dem Finite-Elemente-Programm ANSYS. Vorschläge zur FE-Modellierung von Holztafeln wurden u. a. von Dettmann [5] unterbreitet.

Kasal stellt nichtlineare Finite-Elemente-Modelle sowohl für ebene Wandscheiben mit Substrukturierung in ANSYS [25] als auch für die räumlichen Tragstrukturen ganzer Häuser mit Superelementen [5][6][26][27][28] vor, die u. a. eine Aussage über die Verteilung der äußeren Lasten innerhalb der Tragstruktur ermöglichen und validiert die Modelle mit Versuchsergebnissen.



**Bild 1-3:** Überhöhte Verformungsfigur einer Wandtafel unter Horizontallast mit Berücksichtigung des Druckkontaktes der Rippen untereinander

## 1.2 Grenzen der Schubfeldmethode

Mit vereinfachten, für Handrechnungen geeigneten Verfahren, wie z. B. der *Schubfeldmethode* in DIN 1052 [10] und in den nicht widersprechenden Regelungen und Erläuterungen zu EC5 [15], deren Anwendung für aussteifende Scheiben in Holztafelbauart von Schulze und Schönhoff (1989) [44] vorgeschlagen und von Kessel (2003) [30][31] grundlegend definiert und erläutert wird, kann lediglich eine untere Grenze der Traglast angegeben werden, wie in Abschnitt 3.6.1 gezeigt wird. Eine Abschätzung der tatsächlichen Traglast oder der Verformungen bzw. Steifigkeiten von Holztafelkonstruktionen kann mit der Schubfeldmethode nur im Rahmen der Vereinfachungen erfolgen, die dem Verfahren zugrunde liegen (siehe z. B. [29], [19]).

Die Schubfeldmethode geht auf Ebner (1933) [13][14] zurück und diente zunächst der Bestimmung der Tragfähigkeiten von Leichtbaukonstruktionen im Flugzeugbau. Später wurde sie von Hertel (1960) [20] und Schnell/Czerwenka (1970) [43] für die praktische Anwendung im Stahlleichtbau aufbereitet. Schubfelder bestehen demnach aus dünnen Scheiben, die an allen Rändern durch stabförmige Gurte begrenzt sind. Die Schubfeldtheorie basiert auf der Annahme, dass die *Längssteifigkeit der Schubfelder* vernachlässigt werden kann. Folglich erfahren Schubfelder ausschließlich Schubbeanspruchungen. Durch Freischneiden eines solchen auf Schub beanspruchten Schubfeldes von den Gurten erhält man an den Feldrändern einen umlaufend konstanten Schubfluss  $s_0$ . Dieser beansprucht die Gurte parallel zu deren Längsachsen kontinuierlich über die Randlänge, so dass die Gurte infolge des Schubflusses  $s_0$  ausschließlich Normalkräfte erfahren. Nur wenn die Gurte durch äußere Lasten oder durch die Gurte benachbarter Schubfelder senkrecht zu ihren Längsachsen belastet werden, erhalten sie neben den Normalkraftbeanspruchungen auch Biege- und Querkraftbeanspruchungen. Diese können – bedingt durch die fehlende Längssteifigkeit der Schubfelder – ausschließlich über Biegung in den elastischen Gurten weitergeleitet werden.

Die Schubfeldmethode ist auf den Holztafelbau anwendbar, wenn die Holzrippen als Gurte und die Platten der Beplankung inklusive ihrer kontinuierlichen Verbindung mit den Rippen durch stabförmige Verbindungsmittel als Schubfelder aufgefasst werden. Obwohl die Platten neben ihrer Schubsteifigkeit auch Längssteifigkeiten in beiden Plattenhaupttrichtungen besitzen, kann die Längssteifigkeit der Schubfelder parallel zum Plattenrand vernachlässigt werden, wenn die Steifigkeit der Verbindungsmittel, der Verschiebungsmodul  $K$ , gegenüber der Dehnsteifigkeit  $EA$  der Rippen so gering ist, dass die Längssteifigkeit der Platte infolge einer Dehnung oder Stauchung der Rippe nahezu nicht aktiviert wird. Die Rippen erfahren dann näherungsweise nur Normalspannungen und die Platten ausschließlich Schubspannungen. Senkrecht zum Rand wird die Längssteifigkeit der Platten nicht nennenswert aktiviert, wenn der Verschiebungsmodul der Verbindungsmittel gegenüber der Biegesteifigkeit  $EI$  der Rippen gering ist und wenn planmäßig nur kleine Krümmungen der Rippen vorhanden sind. Auf Tafelkonstruktionen mit planmäßig großen Krümmungen der Rippen, dies sind i. d. R. Tragwerke, die äußere Lasten nicht nur über Schubfeld-

wirkung, sondern auch über die Biegetragfähigkeit der Rippen abtragen, ist die Schubfeldmethode nur bedingt oder gar nicht anwendbar.

Übliche Holztafelkonstruktionen besitzen jedoch auch Eigenschaften, die nicht mit den oben beschriebenen Annahmen der Schubfeldmethode vereinbar sind.

Zu diesen Eigenschaften zählen

- nicht starre, sondern steife Randrippen,
- sich infolge des Druckkontaktes nicht durchdringende Randrippen,
- über mehrere Platten und Öffnungen der Beplankung durchlaufende Randrippen,
- nicht orthogonale Anordnung der Rippen,
- nicht starre, sondern steife Platten der Beplankung,
- beulende Platten und
- freie Plattenränder.

In Bild 1-3 ist der Einfluss einiger dieser Eigenschaften auf das Tragverhalten einer Wandtafel erkennbar..

Die Anwendung des Schubfeldmodells auf Wandtafeln ohne Berücksichtigung der *Nachgiebigkeit der Verankerungen und der Verbindungen der Wandtafeln untereinander* führt zu statischen Modellen, die ausschließlich horizontale Schubverformungen erfahren und keine zusätzlichen vertikalen Biegeverformungen, die sich aus Starrkörperverdrehungen der Tafeln infolge der Nachgiebigkeiten der Verankerungen ergeben. Solche Modelle sind für den mehrgeschossigen Holztafelbau ungeeignet, wie von zur Kammer [47] gezeigt wurde. Denn im Holztafelbau sind die Verbindungen der räumlich angeordneten Dach-, Decken- und Wandtafeln im Verhältnis zur Schubsteifigkeit der Tafeln nicht sehr steif und darüber hinaus auch duktil. Dies führt zu vertikalen Verformungen, die die Spannungsverteilung innerhalb eines mehrgeschossigen Gebäudes beeinflussen. Diese für den Holztafelbau typischen Einflüsse werden in der Schubfeldtheorie nicht behandelt. Dennoch erfolgt zurzeit der Nachweis der statischen Tragfähigkeit von mehrgeschossigen Gebäuden in Holztafelbauart bei ruhenden Einwirkungen und selbst der dynamischen Tragfähigkeit bei Erdbeben auf der Grundlage der elastischen Schubfeldtheorie.

Für Tafeln mit sehr dünnen Beplankungen, die infolge planmäßigen *Beulens* keine ausreichende Schubtragfähigkeit besitzen, so dass die Schubfeldmethode nicht anwendbar ist, kann der Spannungszustand mit Hilfe der Zugfeldtheorie

unter Berücksichtigung überkritischer Tragreserven nach Hertel [20] und Sandau-Wietfeld [42] bestimmt werden.

Bei der Anwendung der Schubfeldtheorie auf den Holztafelbau sind infolge der oben beschriebenen Vernachlässigung der Plattenlängssteifigkeiten nur diejenigen ebenen Dach-, Decken- und Wandtafeln in der räumlichen Gesamtkonstruktion statisch als Scheiben wirksam, welche so konstruiert sind, dass sie als ideale Schubfelder wirken. Zur Bestimmung ihrer Beanspruchungen werden diese einzelnen Tafeln gedanklich aus der Gesamtkonstruktion herausgeschnitten, wie in Bild 1-4a-e gezeigt. Der Verbund zwischen Rippen und Beplankung wird dann theoretisch ausschließlich parallel zum Plattenrand durch  $s_0$  beansprucht und die Rippen erfahren ausschließlich Längsbeanspruchungen.

Die Zerlegung in einzelne ebene Tafeln erfolgt ingenieurmäßig u. a.

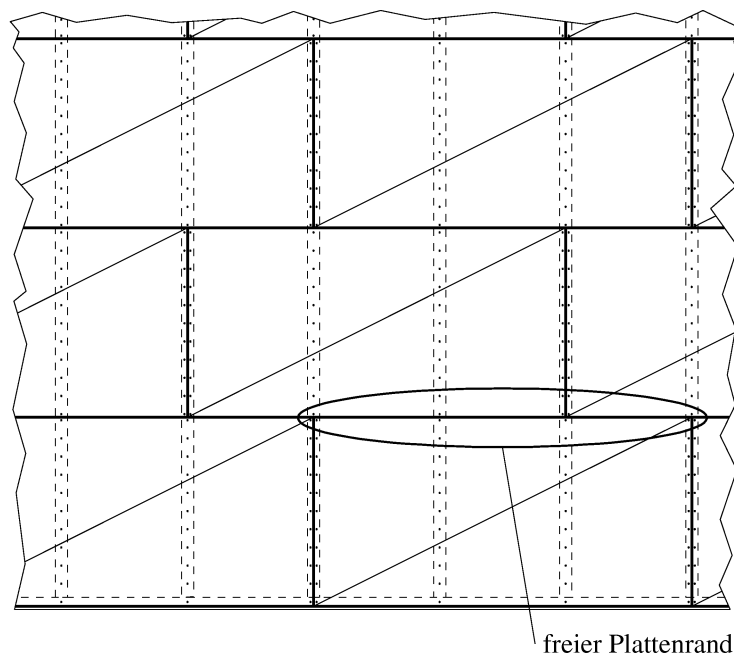
- ohne Berücksichtigung der Tragfähigkeiten der Tragwerksteile, die keine idealen Schubfelder bilden. So werden im ebenen Fall von der Wandtafel in Bild 1-1 ausschließlich die drei Tafeln ohne *Öffnung* als statisch wirksam angesetzt. Sie bilden dann eine so genannte Tafelgruppe. Das Tafelfeld mit Öffnung bleibt vereinfachend unberücksichtigt,
- ohne Berücksichtigung der Biegewirkung *durchlaufender Randrippen*,
- ohne Berücksichtigung von *freien Plattenrändern*, wie sie gerade bei Dach- und Deckentafeln aus konstruktiven Gründen üblich sind. Ihre geringere Tragfähigkeit wird durch empirische Beiwerte pauschal berücksichtigt,
- ohne Berücksichtigung des *Kontaktes der Rippen* untereinander. So wird im statischen Modell eine gegenseitige Durchdringung der Rippen zugelassen. Im realen Tragwerk stellt sich jedoch keine Durchdringung sondern ein Druckkontakt zwischen den Rippen ein, der zusätzliche Längsdruck-, Querdruck- und Biegebeanspruchungen in den Rippen verursacht.



	<b>Schubfeldmethode</b> ohne Plattenlängssteifigkeit <i>Kap. 1</i>	<b>Fließverbundmethode</b> <u>starre</u> Rippen, <u>starre</u> Platten <i>Kap. 3</i>	<b>Stab-Verbund-Modell (u. FEM)</b> <u>steife</u> Rippen, <u>starre</u> Platten <i>Kap. 4</i>
Verschiebungen (100-fach überhöht)	a)	f)	k)
Normalkräfte in den Rippen	b)	g)	l)
Biegemomente in den Rippen	c)	h)	m)
Verbundbeanspruchung $s_0$ parallel zum Plattenrand	d)	i)	n)
Verbundbeanspruchung $s_{90}$ senkrecht zum Plattenrand	e)	j)	o)

**Bild 1-4:** Vergleich der Methoden anhand der Wand aus Bild 1-1 im plastischen Grenzzustand ohne Berücksichtigung des Druckkontaktes der Rippen

Wie oben bereits erwähnt, beteiligen sich im realen Tragwerk jedoch auch die Tragwerksteile ober- und unterhalb von Öffnungen an der Lastabtragung, wie die Verbindungsmittel- und Rippenverformungen in Bild 1-3 und in Bild 1-4k zeigen. Dadurch wird der Verbund zwischen Rippe und Beplankung in Bild 1-4n und o nicht nur parallel zum Plattenrand durch  $s_0$  sondern auch senkrecht zum Plattenrand durch  $s_{90}$  beansprucht. Die Rippen erfahren somit im realen Tragwerk neben den Längsbeanspruchungen auch Biege- und Schubbeanspruchungen (Bild 1-4m) und die Platten in der Beplankung erfahren auch Beanspruchungen senkrecht zum Plattenrand. Bei Anwendung der Schubfeldtheorie kann über die Größe dieser Beanspruchungen keine Aussage gemacht werden (Bild 1-4c und e).



**Bild 1-5:** Ausschnitt einer Deckentafel mit freien Plattenrändern

Auch die Beanspruchungen von Tafeln mit *freien Plattenrändern*, wie die Deckentafel in Bild 1-5, können mit vereinfachten Verfahren, wie dem Schubfeldmodell, nicht hinreichend genau bestimmt werden. In DIN 1052:2008 [10] ist das Tragverhalten für Tafeln mit freien Plattenrändern lediglich empirisch in Form von pauschalen Tragfähigkeitsabminderungen berücksichtigt. Die Abminderung der Tragfähigkeit von Dach- und Deckentafeln mit freien Plattenrändern um  $1/3$  gegenüber Tafeln mit allseits schubsteifen Plattenrändern stützt sich auf Versuche, die eine Verringerung der Tragfähigkeit um etwa  $1/3$  ergaben. Eine Methode zur Berechnung der plastischen Tragfähigkeit existiert bislang nicht. Rein elastische Berechnungen ergeben einen erheblich größeren Abfall der

Tragfähigkeit bei freien Plattenrändern um bis zu  $\frac{3}{4}$ . Dieser Widerspruch zeigt, dass eine linear-elastische Theorie das Tragverhalten solcher Tafeln nicht ausreichend genau wiedergibt und zu unwirtschaftlichen Ergebnissen führen kann.

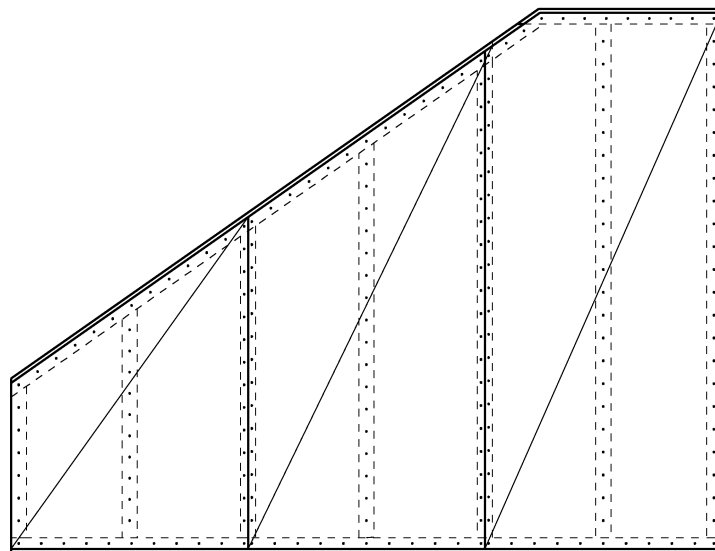
### 1.3 Ziel dieser Arbeit

Ziel dieser Arbeit ist, alternativ zur Schubfeldmethode und zu aufwendigen nichtlinearen FE-Modellierungen neue Methoden aufzuzeigen, Spannungs- und Verformungszustände von scheibenartig beanspruchten Holztafelkonstruktionen unter Berücksichtigung des duktilen Verhaltens des Verbundes und der Verankerungen mit angemessenem Aufwand zu bestimmen.

In Kapitel 3 dieser Arbeit wird daher die „Fließverbundmethode“ zur Modellierung der Spannungen und Verformungen von Holztafelkonstruktionen vorgestellt, die sich für Handrechnungen eignet und die für kleine ebene Tragwerke zu allgemeinen Lösungen führt. Mit dem in Abschnitt 3.4 vorgestellten Berechnungsverfahren auf Basis des Weggrößenverfahrens führt die Fließverbundmethode zu Ergebnissen, wie sie in Bild 1-4f-j dargestellt sind. Die wesentliche Einschränkung dieser Methode liegt in der Annahme, dass sowohl die Rippen als auch die Beplankung der Tafeln starr sind. Der Vergleich mit Ergebnissen, die unter Berücksichtigung der Biegesteifigkeit der Rippen erzielt wurden (Bild 1-4k-o), zeigt, dass durch die Annahme starrer durchlaufender Rippen nicht in allen Fällen der Beanspruchungszustand von Rippen, Verbund und Beplankung zutreffend abgebildet werden kann. In Kapitel 5 wird demzufolge ein Ausblick gegeben, wie die Methode zu erweitern ist, um sie auf beliebige Problemstellungen im Holztafelbau anwenden zu können.

Neben der im 3. Kapitel beschriebenen Fließverbundmethode wird in Kapitel 4 mit dem Stab-Verbund-Modell für Holztafeln eine weitere Methode vorgestellt, mit der sowohl das linear elastische als auch das physikalisch nichtlineare Tragverhalten bis zum Erreichen der Traglast, also bis zum Versagen des Tragwerks, abgebildet werden können. Für linear elastisches Tragverhalten liefert die Anwendung des Stab-Verbund-Modells eine analytische Lösung der Rippen-schnittgrößen, der Verbundbeanspruchungen und der Verformungen, im plastischen Bereich eine iterativ berechnete Lösung. Dies gelingt u. a. durch die Berücksichtigung der Biege- und der Dehnsteifigkeit der Rippen. Das Stab-Verbund-Modell ist auf nahezu beliebige Problemstellungen im Holztafelbau

anwendbar, unabhängig davon, wie das Tragwerk konstruiert ist. So können auch Tafeln mit *freien Plattenrändern*, wie z. B. die Deckentafel in Bild 1-5, modelliert werden, die planmäßig Verbindungsmittelbeanspruchungen senkrecht zu den Plattenrändern aufweisen. Auch Holztafeln mit *nicht orthogonalen Rippen*, wie sie z. B. in Giebelwänden (Bild 1-6) oder in Deckentafeln über nicht orthogonalen Grundrissen vorkommen, können mit dem Stab-Verbund-Modell modelliert werden. Ferner kann der wichtige Einfluss plastifizierender Zuganker sowie abhebender Lager bei Wandtafeln berücksichtigt werden. Das Zusammenwirken der Holztafeln mit Tragwerksteilen, die nicht in Holztafelbauart ausgeführt werden, z. B. Brettschichtholzunterzügen, Vollholzstützen, Stahlrahmen oder Stahlbetonstützen, ist in demselben Modell modellierbar.



**Bild 1-6:** Giebelwandtafel mit nicht orthogonalen Randrippen

Die aus dem Stab-Verbund-Modell gewonnenen Ergebnisse (Beanspruchungen und Verformungen) sind den Ergebnissen einer FE-Analyse, wie z. B. den Ergebnissen in Bild 1-4k-o, vergleichbar, jedoch werden sie mit erheblich geringerem Rechenaufwand erzielt.

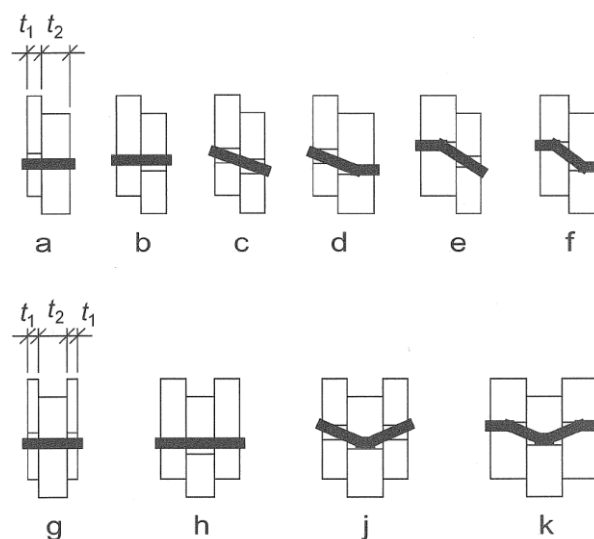
Bei der FE-Modellierung der Wandtafel in Bild 1-4 wurde unterstellt, dass sich die Rippen und die Platten der Beplankung untereinander frei durchdringen können. Für die Anwendung der Schubfeldmethode ist diese Annahme zwingend. Dagegen können die in den Kapiteln 3 und 4 vorgestellten Methoden mit starren und mit steifen Rippen auch den Einfluss des Kontaktes der Rippen und der Beplankungselemente untereinander berücksichtigen, wie der Vergleich von Bild 1-3 mit Bild 1-4k zeigt.

## 2 Physikalisch nichtlineares Verhalten von Holztafeln

### 2.1 Berücksichtigung von Plastizität im Holzbau

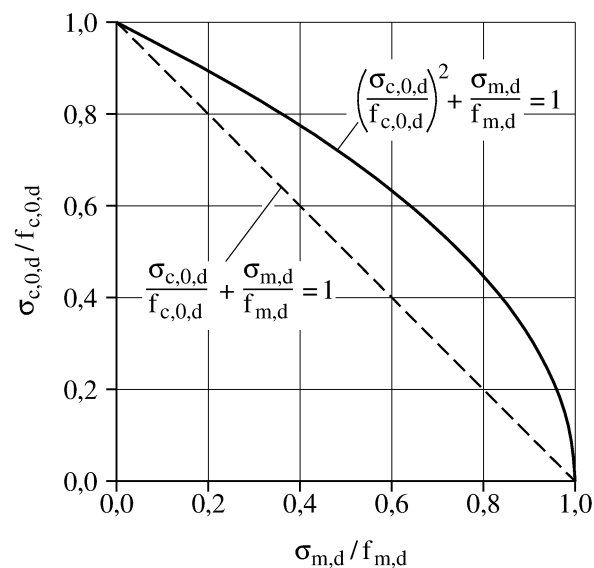
Gegenwärtig wird das Plastifizieren von Werkstoffen jenseits ihrer Fließgrenze im Holzbau an verschiedenen Stellen bereits dazu genutzt, Holzbauteile und ihre Verbindungen gegenüber einer linear-elastischen Berechnung wirtschaftlicher zu bemessen.

Die Gleichungen von Johansen [23], die in den aktuellen Bemessungsnormen [10][15] zur Bestimmung der rechnerischen Beanspruchbarkeit von stabförmigen Verbindungsmitteln in Holzbauteilen dienen, basieren z. B. auf der Annahme, dass sich sowohl das Holz unter Lochleibungsbeanspruchung als auch das Verbindungsmittel unter Biegebeanspruchung ideal-plastisch verhalten (Bild 2-1).



**Bild 2-1:** Versagensmechanismen nach Johansen für Verbindungen aus Holz oder Holzwerkstoffen; aus [4] S. 143

Ein weiteres Beispiel ist die Ausnutzung des plastischen Arbeitsvermögens des Holzes unter Druckbeanspruchung bei der Interaktion von Druck- und Biegebeanspruchungen in Rechteckquerschnitten. Der parabelförmige Verlauf der Grenzzustandslinie in Bild 2-2 bedeutet eine höhere Ausnutzung des Querschnitts im Vergleich zur linearen Interaktion der Beanspruchungen.



**Bild 2-2:** Grenzzustandslinie für Biegung und Druck; aus [21][32]

Auch dürfen nach DIN 1052:2008 Abschnitt 8.1 [10] die Biegemomente statisch unbestimmter Tragwerke aus Beanspruchungen rechtwinklig zur Stabachse umgelagert werden, wenn sie nach Theorie I. Ordnung ermittelt wurden, das Gleichgewicht in allen Teilen erfüllt bleibt und die Auswirkungen der Umlagerungen auf das gesamte Tragwerk berücksichtigt werden. Dadurch kann der Ausnutzungsgrad einer Konstruktion verringert werden, wenn zu schwächer ausgenutzten Querschnittsbereichen hin umgelagert wird. Die Möglichkeit der Umlagerung wird in [4] S. 35 mit dem elastisch-plastischen Verhalten des Holzes und einer Redundanz in statisch unbestimmten Systemen begründet.

Bei Holztafelkonstruktionen werden ebenfalls plastische Tragreserven genutzt, auch wenn in den Bemessungsvorschriften, z. B. in DIN 1052:2008 Abschnitt 8.7.5(7) [10], nicht explizit darauf hingewiesen wird. Hier darf die horizontale Einwirkung auf die durchgehende Kopfrippe einer Wandtafelgruppe unter Scheibenbeanspruchung proportional zu den anteiligen Längen auf die einzelnen Tafeln verteilt angenommen werden ([31], S. 70). Obwohl die Steifigkeit der einzelnen Tafeln mit linear-elastischen Materialgesetzen nicht proportional zur Tafellänge sein muss, ist diese Annahme vor dem Hintergrund eines im Grenzzustand der Tragfähigkeit voll plastifizierten Verbundes gerechtfertigt. Denn infolge der Duktilität des Verbundes wird die Tragfähigkeit jeder Verbindung einer Tafel mit der Kopfrippe im Grenzzustand der Tragfähigkeit unabhängig vom Verschiebungszustand der Tafelgruppe voll ausgeschöpft. Bei Anwendung der Schubfeldmethode erhalten die Verbindungen dann ausschließlich Bean-

spruchungen parallel zur Kopfrippe, die ihrer Beanspruchbarkeit entsprechen und proportional zur Tafellänge sind.

Das letztgenannte Beispiel zeigt, dass die Nutzung plastischer Tragreserven im Holztafelbau sinnvoll erscheint. Dennoch ist bisher kein Bemessungsverfahren bekannt, das die plastischen Eigenschaften von Holztafelkonstruktionen systematisch nutzt. Analog zur Fließgelenktheorie im Stahlbau, mit der z. B. die plastischen Querschnitts- und Systemreserven statisch unbestimmter Rahmenkonstruktionen systematisch ausgeschöpft werden können, wäre ein Verfahren für den Holztafelbau denkbar, das die plastischen Reserven im duktilen Verbund und in den duktilen Verankerungen von Holztafelkonstruktionen nutzt. Nachdem zunächst im Abschnitt 2.2 auf die Fließgelenktheorie im Stahlbau eingegangen wird, wird im Abschnitt 2.3 die Übertragung der Fließgelenktheorie auf den Holztafelbau diskutiert.

## **2.2 Fließgelenktheorie**

### **2.2.1 Allgemeines zur Fließgelenktheorie im Stahlbau**

Die Fließgelenktheorie, die überwiegend im Stahlbau baupraktische Bedeutung hat, ist Gegenstand der Plastizitätstheorie und geht von der Hypothese lokaler Fließgelenke aus [39]. Bei stetiger Laststeigerung geht ein statisch unbestimmtes Tragsystem mit steigender Zahl von Fließgelenken schließlich in eine statisch unterbestimmte kinematische Kette über [11]. Die Beanspruchbarkeit des Systems ist die plastische Grenzlaster bzw. Traglast. Die Richtlinie 008(1973) des Deutschen Ausschusses für Stahlbau bezeichnete die auf der Fließgelenktheorie beruhende Berechnungsmethode daher als „Traglastverfahren“.

In einer rein elastischen Berechnung eines Stahl-Stabtragwerks nach Theorie I. Ordnung ist dessen Beanspruchbarkeit, die elastische Grenzlaster, erreicht, wenn die Spannungen in einem Querschnitt, z. B. die Biegezugspannungen, die Fließgrenze erreichen. Bei Vernachlässigung geometrischer Imperfektionen verhält sich das Tragwerk nach der Elastizitätstheorie bis zum Erreichen der elastischen Grenzlaster konsequent linear, so dass Spannungen und Verformungen stets proportional zur Last sind und das Superpositionsgesetz gilt.

Die Fließgelenktheorie berücksichtigt dagegen das nichtlineare Werkstoffverhalten des Stahls, das Fließen. Folglich sind auch die Spannungen und Verformungen nichtlinear von der Last abhängig [11]. Da das Superpositionsgesetz hier

nicht mehr gilt, ist eine Überlagerung einzelner Lastfälle nicht mehr möglich. Stattdessen sind alle Lasten eines Lastzustandes gemeinsam zu untersuchen.

Biegesteife stählerne Stabtragwerke weisen plastische Querschnittsreserven und plastische Systemreserven auf [39]. Eine plastische Querschnittsreserve ist bei reiner Momentenwirkung durch das Verhältnis des plasto-statischen Grenzmoments  $M_{pl}$  eines Querschnitts zu dessen elasto-statischem Grenzmoment  $M_{el}$  gegeben. Die plastische Systemreserve kann gegenüber der elastischen Grenztragfähigkeit ausgeschöpft werden, wenn die Querschnitte an den höchstbeanspruchten Stellen des Tragwerks durchplastifiziert sind und das System in eine kinematische Kette übergeht. Plastische Systemreserven sind nur bei statisch unbestimmten Systemen vorhanden.

Durch die Anwendung der Fließgelenktheorie werden plastische Systemreserven ausgeschöpft. Dadurch kann die Bemessung von Stahlkonstruktionen mit der Fließgelenktheorie gegenüber der Anwendung der Elastizitätstheorie wirtschaftlicher sein.

### 2.2.2 Theoreme der Fließgelenktheorie und Eingrenzungssätze

Bei einer schrittweisen Steigerung der äußeren Last bis zum Erreichen eines kinematischen Mechanismus' wird jeder Zustand, in dem eine Steifigkeitsänderung des statischen Systems stattfindet, berechnet. Dazu sind bei statisch unbestimmten Systemen mehrere Berechnungsschritte erforderlich, innerhalb derer ggf. iteriert wird. Das Ergebnis ist in jedem Fall der eindeutig bestimmte und einzig mögliche plastische Grenzzustand. Für eine computergestützte Berechnung ist dieses Vorgehen gut geeignet, da die vielen Berechnungsschritte kein Problem darstellen. Analytische Berechnungen werden dagegen bei größerer statischer Unbestimmtheit mit diesem Berechnungsweg sehr aufwendig. Alternativ kann der plastische Grenzzustand unter Berücksichtigung der folgenden Theoreme mit angemessenem Aufwand analytisch berechnet oder zumindest eingegrenzt werden.

Der plastische Grenzzustand genügt folgenden Bedingungen [11][39]:

(B1) Gleichgewicht ist in allen Teilen erfüllt.

(B2) In allen Querschnitten gilt:  $|M| \leq M_{pl}$ . (2.1)

(B3) Ein kinematischer Bruchmechanismus ist erreicht.



(B4) In allen Fließgelenken wird positive Dissipationsarbeit geleistet.

Bedingung (B2) legt fest, dass die Momente an keiner Stelle größer sein können als das aufnehmbare plastische Grenzmoment  $M_{pl}$ . Im Interaktionsfall steht  $M_{pl}$  für das die Fließbedingung erfüllende verminderte plastische Moment. Die vierte Bedingung (B4) sagt aus, dass in allen plastischen Gelenken der Drehsinn der Momente und die plastischen Verdrehungen gleichsinnig sein müssen [11], denn nur dann wird infolge Materialplastizierung Energie dissipiert [39].

Für den plastischen Grenzzustand gilt der Eindeutigkeitssatz:

### **Eindeutigkeitssatz**

„Hat man einen Zustand gefunden, der alle vier Bedingungen (2.1) erfüllt, so ist dies in der Theorie I. Ordnung der tatsächliche Grenzlastzustand, denn es gibt nur einen einzigen.“ [11]

Eine untere Grenze der plastischen Grenzlast  $F_{pl}$  erhält man durch Einhaltung des statischen Satzes:

### **Statischer Satz (untere Grenze)**

„Alle Zustände, die die Bedingungen (B1), Gleichgewicht, und (B2),  $|M| \leq M_{pl}$ , erfüllen, sind statisch zulässige Spannungszustände. Eine kinematische Kette (B3) muss noch nicht erreicht sein. Für die zugehörige Last  $F_{stat}$  gilt [11]:

$$F_{stat} \leq F_{pl}$$

Wenn die Bedingungen des statischen Satzes eingehalten sind, können die äußeren Lasten noch erhöht werden, bis die kinematische Kette erreicht ist. Folglich befindet sich dieser Zustand stets „auf der sicheren Seite“. Auch für den Sonderfall, dass der plastische Grenzzustand zufällig oder anschaulich gefunden wurde, ist der statische Satz gültig. In einem Zustand, der mit dem statischen Satz konform ist, kann das Tragwerk vollständig elastisch sein oder bereits Fließgelenke aufweisen. In den Fließgelenken können die elastischen Verträglichkeitsbedingungen unberücksichtigt bleiben, da die Verschiebungsgrößen im plastischen Querschnitt nicht mehr proportional zu den Schnittgrößen sind.

Mit dem statischen Satz erhält man also eine untere Grenze der plastischen Grenzlast eines statisch unbestimmten Stabmodells, wenn man wie folgt vor-

geht: Das statisch unbestimmte Modell wird durch ein statisch bestimmtes Modell ersetzt, indem zusätzliche Gelenke (Momentengelenke und / oder „Schiebehülsen“) an beliebigen Stellen eingeführt werden. In diesen zusätzlich definierten Gelenken werden nun wieder Schnittgrößen dadurch eingeführt, dass unmittelbar neben den Gelenken entsprechende Ersatzlasten (Einzelmomente und / oder Einzelkräfte) angeordnet werden. Die Größe dieser Ersatzlasten ist vorzugsweise so zu wählen, dass die Fließbedingung in den zusätzlich definierten Gelenken erfüllt ist (B2 erfüllt). Außerdem sind die Wirkungsrichtungen der Ersatzlasten so zu wählen, dass sie den Verschiebungen infolge äußeren Lasten entgegen wirken (B4 erfüllt). Der dadurch entstandene Ersatzlastzustand liefert in der Superposition mit den äußeren Lasten einen Spannungszustand in dem zuvor gewählten statisch bestimmten Modell (B1 erfüllt). Mit diesem Spannungszustand darf die Fließbedingung in keinem Teil des statisch bestimmten Modells verletzt werden. Geschieht dies doch, so sind die Ersatzlasten und die äußeren Lasten so weit abzumindern, bis die Fließbedingung in allen Teilen des Tragwerks wieder eingehalten ist (B2 erfüllt). Ein kinematischer Mechanismus muss in diesem Zustand noch nicht erreicht sein (B3 muss nicht erfüllt sein).

Mit dem statischen Satz können jedoch nicht nur untere Grenzwerte des plastischen Grenzzustandes, sondern auch der plastische Grenzzustand selbst bestimmt werden, wenn der eine Gleichgewichtszustand gefunden wird, der die Bedingungen B1, B2 und B4 erfüllt und der zugleich einem kinematischen Mechanismus entspricht (B3 erfüllt). Um diesen Gleichgewichtszustand zu finden, können mehrere dem statischen Satz entsprechende Gleichgewichtszustände durchprobiert und dahingehend überprüft werden, ob sie zugleich einem kinematischen Mechanismus entsprechen.

Eine obere Grenze der plastischen Grenzlast  $F_{pl}$  liefert der kinematische Satz:

### **Kinematischer Satz (obere Grenze)**

„Alle Zustände, die nach (2.1) die Bedingungen (B1), Gleichgewicht, (B3), kinematische Kette und (B4), plastische Verformungen der kinematischen Kette gleichsinnig mit Richtung der Schnittgrößen, erfüllen, sind kinematisch zulässige Verschiebungszustände. Die für das Gleichgewicht erforderlichen Schnittgrößen können dabei auch größer sein als die ertragbaren bei vollplastisierten Querschnitten; die Bedingung (B2) braucht nicht erfüllt zu werden. Für die Last  $F_{kin}$  gilt [11]:

$$F_{pl} \leq F_{kin}$$

Hier werden Stellen toleriert, an denen  $|M| > M_{pl}$  ist. In diesen Fällen ist die zugehörige Gleichgewichtslast  $F_{kin}$  stets größer als die plastische Grenzlast  $F_{pl}$  und man liegt folglich auf der „unsicheren Seite“. Auf den Sonderfall, dass die plastische Grenzlast  $F_{pl}$  zufällig oder anschaulich gefunden wurde, trifft der kinematische Satz ebenfalls zu.

## 2.3 Übertragung der Fließgelenktheorie auf den Holztafelbau

### 2.3.1 Problemstellung

Eine direkte Übertragung der in Abschnitt 2.1 beschriebenen Fließgelenktheorie auf Holztafeltragwerke ist ohne weiteres nicht möglich, da das Tragverhalten und somit auch die statischen Modelle von Stahlrahmen und Holztafeln grundsätzlich unterschiedlich sind. Während Stahlrahmentragwerke ihre Lasten überwiegend über Biegung und Normalkräfte in den stabförmigen Bauteilen in die Auflager weiterleiten, so dass die plastische Grenzlast i. W. durch die Biegebeanspruchbarkeit der Stäbe bestimmt wird, zeigt Bild 1-3, dass Holztafeltragwerke ihre Lasten über ein komplexes Zusammenwirken aller Bauteile, das sind die Holzrippen, die Beplankung, der Verbund von Rippen und Beplankung sowie die Verankerungen, in die Auflager leiten. Dabei erfahren die Rippen sowohl Biege- als auch Normalkraftbeanspruchungen, die Beplankung wird i. W. auf Schub beansprucht und der Verbund überträgt Kräfte sowohl parallel als auch senkrecht zu den Plattenrändern bzw. Rippenachsen. Die plastische Grenzlast wird bei Tafeln in der Regel durch die Beanspruchbarkeit der Verbindungen zwischen Rippen und Beplankung oder Rippen und Zugverankerungen bestimmt.

In Stahlrahmentragwerken entstehen örtliche Fließzonen in den Stabquerschnitten, die durch punktuelle Fließgelenke modelliert werden können. In Holztafeltragwerken dagegen fließen die Verbindungsmittel zwischen Rippen und Beplankung sowie in den Verankerungen, während sich die übrigen Bauteile elastisch verhalten. Sieht man von einer Modellierung jedes einzelnen Verbindungsmittels ab und betrachtet stattdessen den Verbund als kontinuierliche Verbindung zwischen Rippen und Beplankung, so können Fließzonen entstehen, die

sich über größere Längen, wie z. B. die Länge eines Plattenrandes, erstrecken. Solche Fließzonen können nicht mehr mit punktuellen Fließgelenken modelliert werden. Innerhalb dieser Fließzonen variiert die Richtung der Relativverschiebungen zwischen Rippen und Beplankung und damit die Beanspruchungsrichtung der fließenden Verbindungsmittel. Dies führt zu einer Fließbedingung für den Verbund, die auf einer Interaktion der Beanspruchungsrichtung parallel zum Plattenrand mit der Beanspruchungsrichtung senkrecht dazu beruht. Hierbei hat die Krümmung der Rippen großen Einfluss, da die Anteile der Verbindungsmitteverschiebungen, die aus den Biegeverformungen der schlanken Rippen resultieren, in derselben Größenordnung liegen können, wie die übrigen Anteile. Folglich sind bei der Berechnung des plastischen Grenzzustandes die Biegebeanspruchungen der Rippen und die Verbundbeanspruchungen als gekoppeltes Problem zu behandeln.

### **2.3.2 Entwicklung der Fließverbundmethode**

In Abschnitt 2.3.1 wurde dargelegt, dass die Fließgelenktheorie aus dem Stahlbau nicht direkt auf den Holztafelbau übertragbar ist. Aus der Motivation heraus, eine Methode für den Holztafelbau zu entwickeln, die für Handrechnungen geeignet ist, und die die in Abschnitt 2.3.1 genannten Besonderheiten des Holztafelbaus, insbesondere die richtungsabhängigen Fließzonen, berücksichtigt, führten zur Entwicklung der Fließverbundmethode, die in Kapitel 3 vorgestellt wird.

## 3 Fließverbundmethode für Holztafeln

### 3.1 Einleitung

Die Verformungen und die Beanspruchungen von Holztafelkonstruktionen werden im Wesentlichen durch die Geometrie und die Steifigkeiten der Rippen, der Beplankung, des Verbundes von Rippen und Beplankung sowie der Verankerungen bestimmt [5]. Tafeln sind idealer Weise so konstruiert, dass sich der Verbund und die Verankerungen im Versagenszustand duktil verhalten, während Rippen und Beplankung elastisch sind. Detaillierte statische Modellierungen von Holztafeln, wie z. B. mit FE-Modellen, in denen jedes Verbindungsmittel einzeln modelliert wird, sind daher einerseits vielfach statisch unbestimmt, andererseits wegen des duktilen Verbundes physikalisch nichtlinear. Für analytische Lösungen, die im Ingenieuralltag wirtschaftlich angewendet werden können, sind solche Modelle ungeeignet.

Im Folgenden wird die Fließverbundmethode vorgestellt, die analytische Lösungen für Holztafelkonstruktionen ermöglicht. Mit der Fließverbundmethode können sowohl der elastische als auch der plastische Grenzzustand der Tragfähigkeit einer Holztafelkonstruktion bestimmt werden. Unter dem elastischen Grenzzustand versteht man den Verschiebungszustand der Tafel, in welchem das erste Verbindungsmittel seine Fließverschiebung erreicht. Der elastische Grenzzustand wird ausführlich in Abschnitt 3.4 erläutert. Der plastische Grenzzustand einer Holztafelkonstruktion ist erreicht, wenn eine geringfügige Erhöhung der äußeren Last infolge des Fließens von Verbindungsmitteln und Verankerungen zu großen Verschiebungen der Konstruktion führt. Die Bestimmung des plastischen Grenzzustandes wird in Abschnitt 3.5 erläutert.

Durch Anwendung der Fließverbundmethode erhält man einfache Modelle, die auf nahezu beliebige Problemstellungen im Holztafelbau angewendet werden können. Diesen Modellen liegen folgende vereinfachende Annahmen zugrunde:

- Äußere Lasten werden ausschließlich in Form von Einzellasten auf die Rippen in Richtung der Rippenachsen aufgebracht.
- Die Rippen sind dehn- und biegestarr (siehe Kap. 3.3).

- Die Rippen sind nicht untereinander verbunden und können sich zwängungsfrei durchdringen, sofern keine Verbindungen zusätzlich definiert werden.
- Die Platten der Beplankung sind starr und können sich zwängungsfrei durchdringen.
- Rippen und Platten sind so bemessen, dass sie für die Tragfähigkeit der Tafel nicht maßgebend werden, d. h. ein sprödes Versagen der Rippen und Platten vor dem Erreichen der plastischen Grenzlast der Tafel ist ausgeschlossen.
- Die Verbindungsmittel folgen einem ideal-elastisch-plastischen Werkstoffgesetz (siehe Kap.3.2, Bild 3-8).
- Die Verbindungsmittelabstände  $a_v$  sind in allen tragenden Verbindungen gleich groß.
- Die Verbindungsmittel zwischen Rippen und Platten werden nicht einzeln betrachtet, sondern als kontinuierliche Verbindungen zwischen einem Plattenrand und einem Rippenabschnitt. Die Steifigkeiten dieser kontinuierlichen Verbindungen werden zu resultierenden Federsteifigkeiten zusammengefasst (siehe Abschnitt 3.4.1).

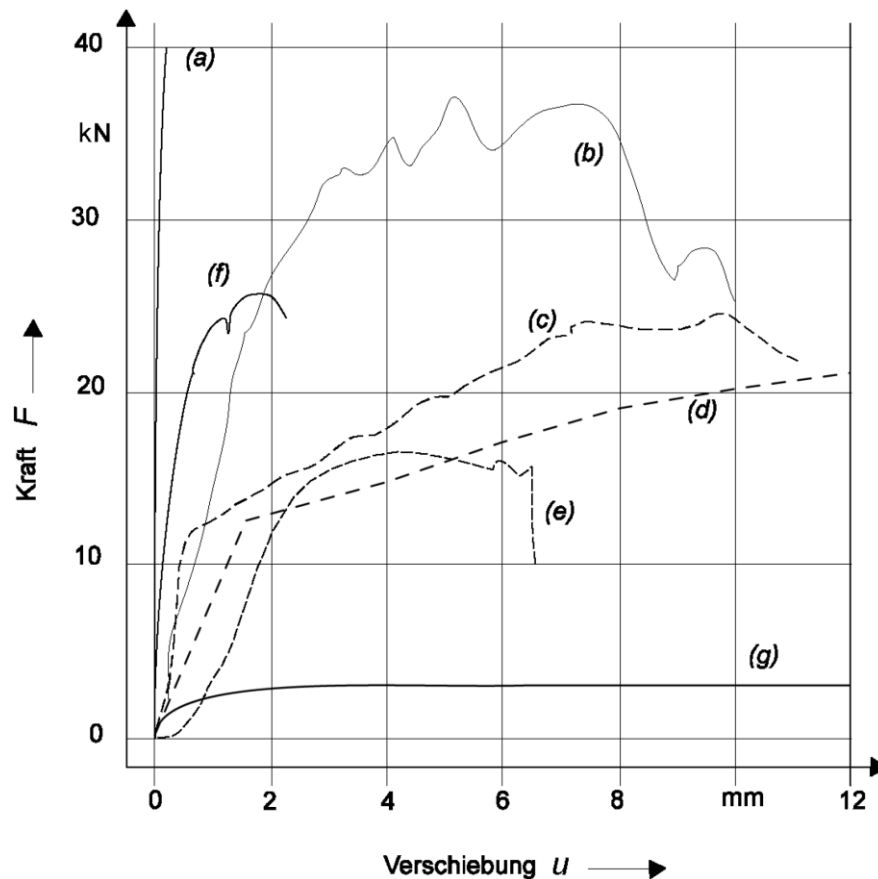
Für solche vereinfachten Modelle werden außer den geometrischen Daten nur die Steifigkeit und die Fließgrenze der Verbindungen benötigt.

### 3.2 Der Verbund von Rippen und Beplankung

Der Verbund von Rippen und Beplankung in Holztafeln wird durch stabförmige Verbindungsmittel wie Nägel, Schrauben oder Klammern hergestellt. Die Steifigkeiten dieser Verbindungsmittel haben wesentlichen Einfluss auf das Tragverhalten der Tafel.

Bild 3-1 zeigt das Kraft-Verschiebungs-Verhalten verschiedener Holzverbindungen. Alle dargestellten Kurven verlaufen nichtlinear. Dabei weisen die stabförmigen Verbindungsmittel d), e) und g) ein duktiles Verhalten auf. Besonders die für den Verbund einer Holztafel relevante Nagelverbindung g) besitzt ein ausgeprägtes „Fließplateau“, d. h. nach Erreichen der aufnehmbaren Höchstlast steigen die Verformungen bei gleich bleibendem Lastniveau weiter an.

Ähnliche Kurvenverläufe ermittelt Kessel [30] für Nagelverbindungen in Holztafeln mit verschiedenen Beplankungswerkstoffen und Nageldurchmessern (Bild 3-2). Raschper stellt in [41] ebenfalls entsprechende Diagramme aus verschiedenen Versuchen zusammen (Bild 3-3).

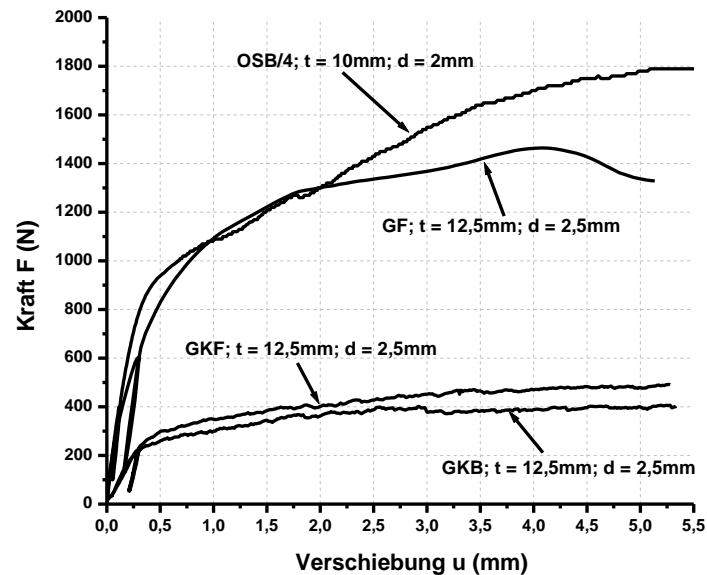


**Bild 3-1:** Kraft-Verschiebungs-Kurven (Versuchswerte) verschiedener Holzverbindungen nach [40]

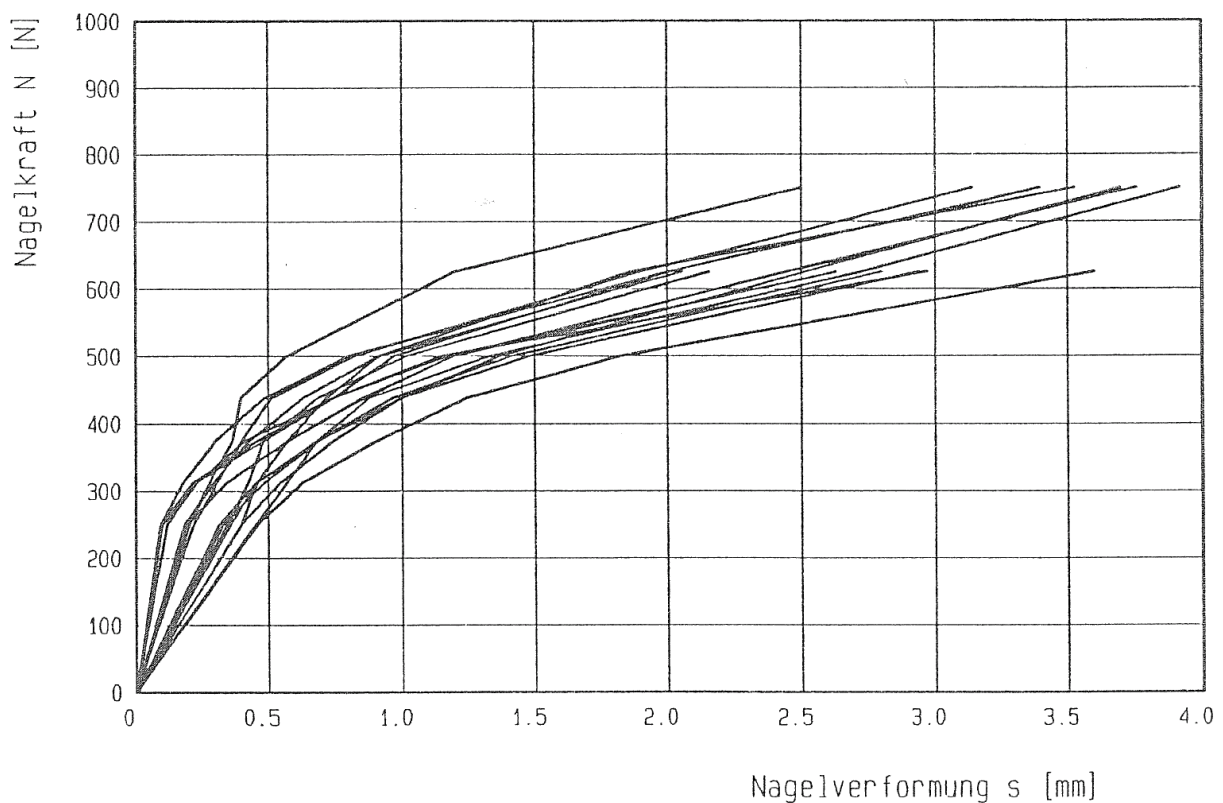
a) geleimte Verbindung ( $A = 12500\text{mm}^2$ ), b) Einlassdübel ( $d = 100\text{mm}$ ), c) zweiseitiger Einpressdübel ( $d = 62\text{mm}$ ), d) Stabdübel ( $d = 14\text{mm}$ ), e) Bolzen ( $d = 14\text{mm}$ ), f) Nagelplatte ( $A = 10000\text{mm}^2$ ), g) Nägel ( $d = 4,4\text{mm}$ )

Klammern weisen ein ähnliches Kraft-Verformungs-Verhalten wie Nägel auf, da die beiden Klammerschäfte wie zwei Nägel des gleichen Durchmessers und des gleichen Fließmomentes wirken. Bild 3-4 zeigt die freigelegte Klammer einer typischen Holztafelverbindung, die sich infolge einer Scher-Lochleibungs-Beanspruchung plastisch verformt hat. An der herausgelösten Klammer sind deutlich je zwei Fließzonen pro Klammerschaft zu erkennen. Das Fließen des Verbindungsmittelstahls und die damit einhergehenden plastischen Verformun-

gen der Lochränder im Holz sind ursächlich für das ausgeprägt nichtlineare Kraft-Verschiebungs-Verhalten von Nagel- und Klammerverbindungen (vgl. Bild 3-1 und Bild 3-2).

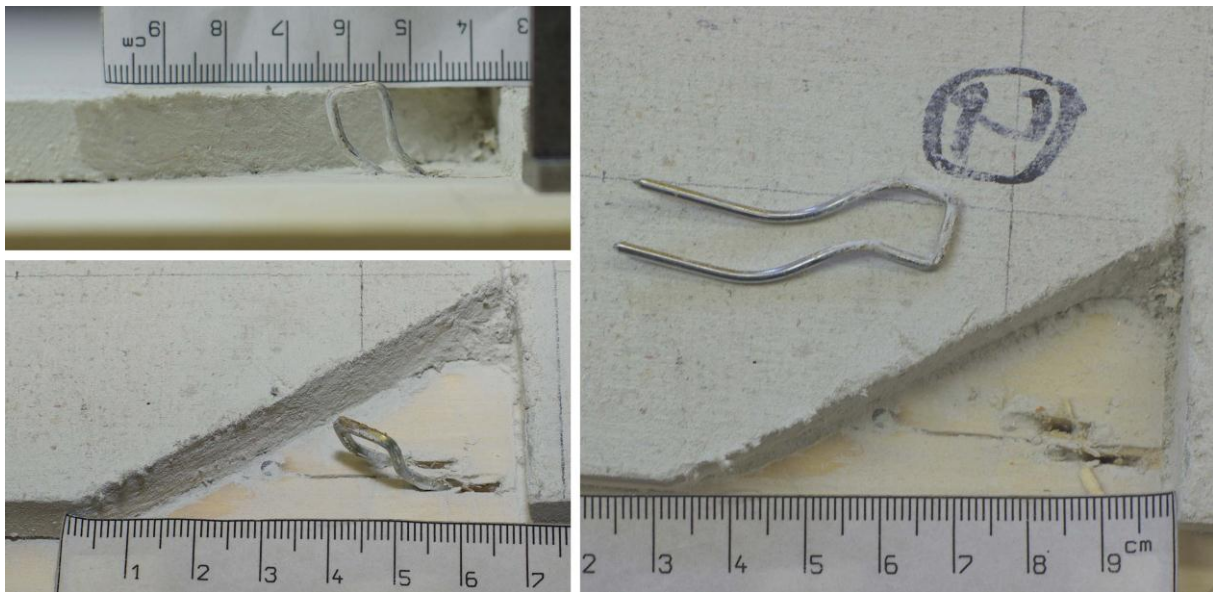


**Bild 3-2:** Kraft-Verschiebungs-Diagramm einer Lochleibungsprüfung nach EN383, aus [30]



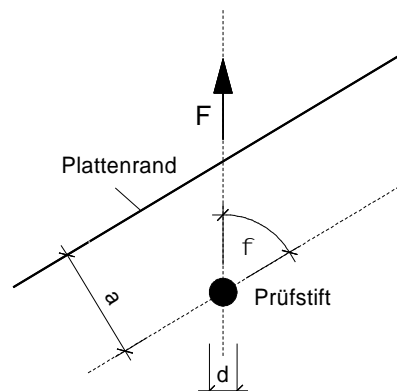
**Bild 3-3:** Kraft-Verschiebungs-Diagramme von Nägeln, aus [41]





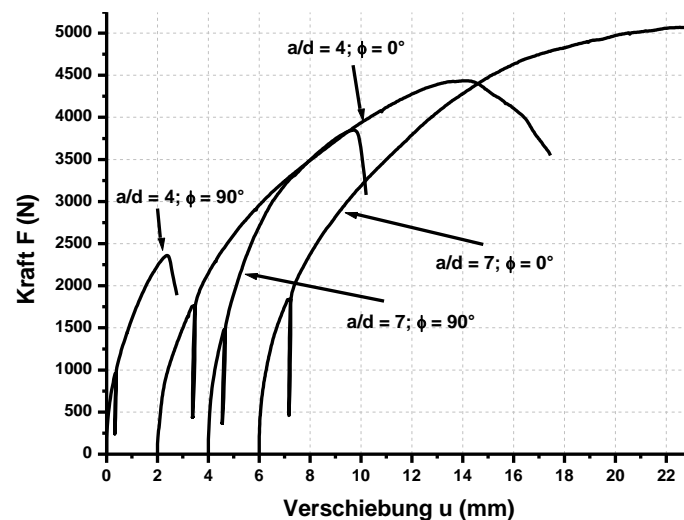
**Bild 3-4:** Freigelegte, plastisch verformte Klammer in einer Gipswerkstoff-Holz-Verbindung

Die Steifigkeit solcher Verbindungen hängt von den Materialeigenschaften und der Geometrie des Verbundes ab. Materialeigenschaften sind die Festigkeit des Verbindungsmittels und die Lochleibungsfestigkeiten des Rippen- und des Beplankungswerkstoffes. Die Geometrie kann mit einigen wesentlichen Parametern beschrieben werden. In [30] sind diese Geometrieparameter neben der Plattendicke  $t$  und der Eindringtiefe des Verbindungsmittels in das Holz auch sein Durchmesser  $d$ , sein Abstand  $a$  vom Plattenrand und der Winkel  $\phi$ , den die Richtung der durch das Verbindungsmittel übertragenen Kraft  $F$  und der Plattenrand einschließen.



**Bild 3-5:** Randabstand  $a$  des Verbindungsmittels zum Beplankungsrand; Winkel  $\phi$  zwischen Beplankungsrand und Richtung der Kraft  $F$ ; aus [30]

Der Einfluss der Geometrieparameter  $a$ ,  $d$  und  $\phi$  auf das Tragverhalten der Verbindungsmittel ist in Bild 3-6 dargestellt. Während die Verformungen bei randparalleler Beanspruchung in der Nähe der Tragfähigkeitsgrenze deutlich nichtlinear zunehmen und bei ausreichend großem Randabstand eine Art „Fließen“ des Verbundes einsetzt, ist bei Beanspruchung senkrecht zum Plattenrand mit abnehmendem Randabstand ein eher sprödes Verhalten des Verbundes zu erkennen.



**Bild 3-6:** Kraft-Verschiebungs-Diagramm für Verbindung Gipsfaserplatte und Holz mit 4 Nägeln in Abhängigkeit vom Winkel  $\phi$  und Randabstand  $a/d$  [30]

Um ein sprödes Versagen der Rippen und der Beplankung in Holztafeln zu vermeiden, sind nur Verbindungen geeignet, die ein ausgeprägt duktilen Verhalten des Verbundes (siehe Bild 3-4) und der Zugverankerungen gewährleisten. Bei der Konstruktion von Holztafeln ist dies durch die Einhaltung ausreichender Randabstände und Plattendicken sicherzustellen. Da die Randabstände für Verbindungsmittelbeanspruchungen senkrecht zur Rippenachse bzw. zum Plattenrand größer sind als die für parallele Beanspruchungen, sind vor dem Hintergrund wirtschaftlicher Rippenstärken gegebenenfalls Tafelkonstruktionen zu bevorzugen, deren Verbindungsmittel überwiegend parallel zum Beplankungsrand und nur in geringem Maße senkrecht dazu beansprucht werden.

Richtlinien für die Ermittlung der Tragfähigkeit und des Verformungsverhaltens von Nagel- und Klammerverbindungen sind u. a. in EN 26891 [8] und EN 383 [9] angegeben. Mit den nichtlinearen Last-Verschiebungs-Diagrammen aus entsprechend dieser Normen durchgeführten Versuchen können neben der Höchst-

last  $F_{\max}$  auch die Gebrauchslast  $F_{\text{ser}}$  und die elastische Anfangsverschiebung  $u_{\text{inst}}$  abgeschätzt werden [22].

Die Gebrauchslast  $F_{\text{ser}}$  beträgt dabei 40 Prozent der geschätzten Höchstlast  $F_{\text{est}}$ , die vor der Versuchsdurchführung aufgrund von Erfahrungen, Berechnungen oder Vorprüfungen bestimmt und ggf. nachträglich an die Höchstlast  $F_{\max}$  angeglichen wurde [8]. Aus der Gebrauchslast  $F_{\text{ser}}$  und der zugehörigen Anfangsverschiebung  $u_{\text{inst}}$  kann der Anfangsverschiebungsmodul  $K_{\text{ser}}$  für den Gebrauchstauglichkeitsnachweis bestimmt werden:

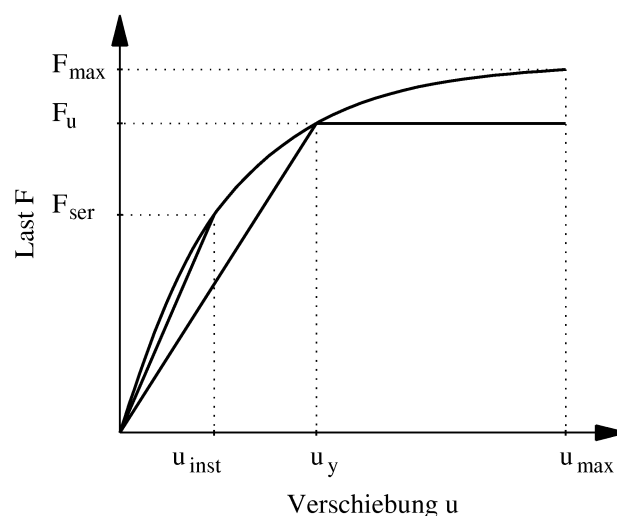
$$K_{\text{ser}} = \frac{0,4 \cdot F_{\text{est}}}{u_{\text{inst}}} = \frac{F_{\text{ser}}}{u_{\text{inst}}} \quad (3.1)$$

Alternativ dazu sind im Eurocode 5 [15] und in DIN 1052 [10] Mittelwerte für Verschiebungsmoduln  $K_{\text{ser}}$  angegeben, die von der Rohdichte der miteinander Verbundenen Teile und dem Verbindungsmitteldurchmesser abhängen.

Für den Nachweis im Grenzzustand der Tragfähigkeit wird der Verschiebungsmodul  $K_u$  unter Berücksichtigung des nichtlinearen Last-Verschiebungsverhaltens von Nagel- und Klammerverbindungen durch eine Abminderung von  $K_{\text{ser}}$  berechnet [10] (Bild 3-7):

$$K_{u,\text{mean}} = \frac{2}{3} \cdot K_{\text{ser}} = \frac{F_u}{u_y} \quad (3.2)$$

Für alle Nachweise nach dem Teilsicherheitskonzept sind diese Verschiebungsmoduln durch den Teilsicherheitsbeiwert  $\gamma_M$  zu teilen.



**Bild 3-7:** Nichtlineares und vereinfachtes ideal-elastisch-plastisches Last-Verschiebungs-Diagramm eines Verbindungsmittels

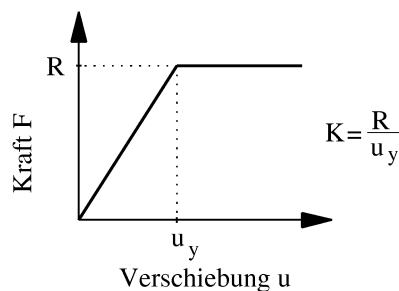
Die rechnerische Beanspruchbarkeit  $R$  eines Nagels bzw. einer Klammer kann mit den Gleichungen von Johansen [23] bestimmt werden, die durch die Anwendung der Fließgelenktheorie auf Holzverbindungen entstanden. Diese Gleichungen basieren auf der Annahme, dass sich sowohl das Holz bzw. der Holzwerkstoff unter Lochleibungsbeanspruchung als auch das Verbindungsmittel unter Biegebeanspruchung ideal-plastisch verhalten.

Die aus Versuchsergebnissen gewonnenen nichtlinearen Kraft-Verschiebungs-Diagramme von Nagel- und Klammerverbindungen können analytisch durch Regressionsgleichungen beschrieben werden. In Gupta und Kuo (1985) [17] wird die Kraft-Verschiebungs-Kurve von Nägeln z. B. durch die Potenzfunktion

$$F = 522 \cdot u^{0,361} \quad (3.3)$$

beschrieben, wobei  $F$  die Nagelkraft in N und  $u$  die Nagelverschiebung in mm ist.

In numerischen Berechnungen (z. B. FE-Analysen) sind solche Gleichungen wegen der programmtechnischen Umsetzung eher ungeeignet. Hier ist eine Approximation der nichtlinearen Kraft-Verschiebungs-Kurve durch einen Polygonzug sinnvoll, dessen Bereichsgrenzen mit Punkten der Last-Verschiebungs-Kurve koinzident sind [5].



**Bild 3-8:** Vereinfachtes ideal-elastisch-plastisches Last-Verschiebungs-Diagramm eines Verbindungsmittels

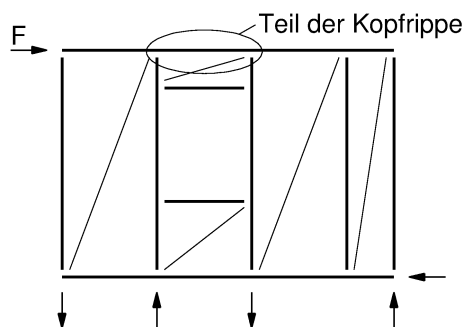
Die Genauigkeit von Regressionsgleichungen oder Approximationen mit Polygonzügen ist jedoch nur dann angemessen, wenn das Tragverhalten eines konkreten Tragwerks – z. B. für wissenschaftliche Zwecke – simuliert werden soll, dessen individuelle Verbindungseigenschaften durch Versuche bereits bestimmt wurden. Im Regelfall ist jedoch nicht zuletzt vor dem Hintergrund großer Streuungen in den Kurvenverläufen verschiedener Versuchsreihen [41] ein einfaches Last-Verschiebungs-Diagramm, wie in Bild 3-8 dargestellt, hinreichend genau.

Zudem ermöglicht ein solches einfaches Last-Verschiebungs-Gesetz analytische Lösungen und eine einfache programmtechnische Umsetzung des nichtlinearen Tragverhaltens von Nagel- und Klammerverbindungen.

In dieser Arbeit kommt ausschließlich das ideal-elastisch-plastische Kraft-Verschiebungs-Diagramm nach Bild 3-8 zur Anwendung. Bis zum Erreichen seiner Beanspruchbarkeit  $R$  wird das Last-Verschiebungs-Verhalten des Verbindungsmittels zwischen Rippe und Platte als linear-elastisch angenommen. Bei Verbindungsmittelverschiebungen, die größer oder gleich der Fließverschiebung  $u_y$  sind, wird dem Verbindungsmittel ideal-plastisches Verhalten unterstellt, so dass die Verbindungsmittelkraft unabhängig von der Verschiebung  $u$  konstant  $R$  beträgt.

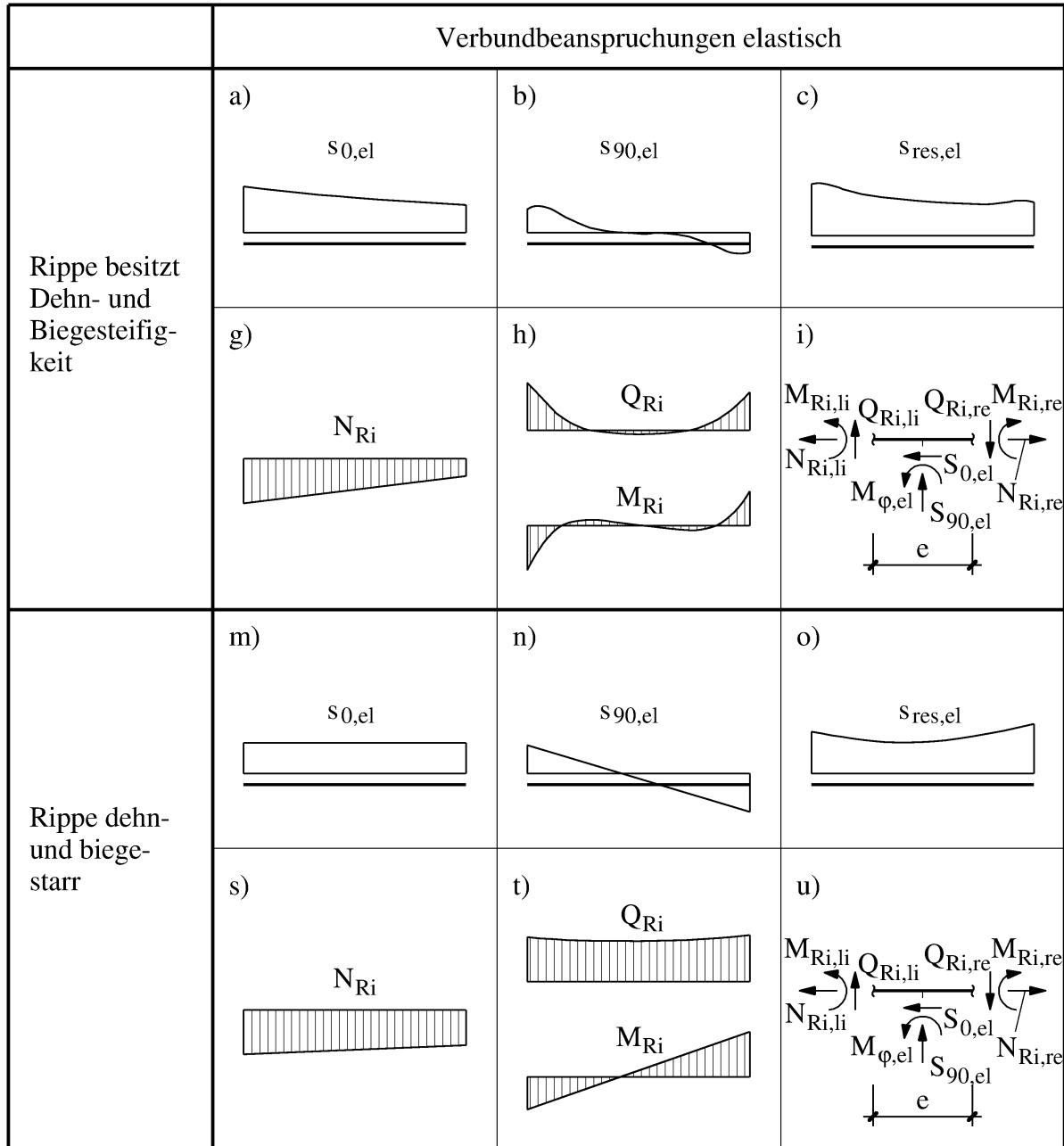
### 3.3 Dehn- und biegestarke Rippen

Holztafeln werden in der Regel mit schlanken Rippen ausgeführt, die aus Rechteckquerschnitten bestehen. Die Querschnittshöhe folgt zumeist aus bauphysikalischen Anforderungen, wie dem Wärme- und Schallschutz, und beträgt oft ein Vielfaches der Querschnittsbreite, die aus wirtschaftlichen Gründen – den statischen und konstruktiven Erfordernissen Genüge tragend – möglichst schmal gewählt wird (Bild 1-2). In der Tafelebene besitzen die Rippen daher eine wesentlich geringere Biegesteifigkeit als senkrecht dazu. Wird die Tafel in ihrer Ebene belastet, wie z. B. die Wandtafel in Bild 1-3, so erfahren die Rippen Biegeverformungen in der Tafelebene. Die Größe dieser Verformungen hängt sowohl von der Biegesteifigkeit der Rippe als auch von der Steifigkeit des Verbundes ab, der die Rippe mit der Beplankung verbindet.



**Bild 3-9:** In Bild 3-10 betrachteter Teil der Kopfrippe in der Wandtafel aus Bild 1-1 unter einer Horizontallast  $F$

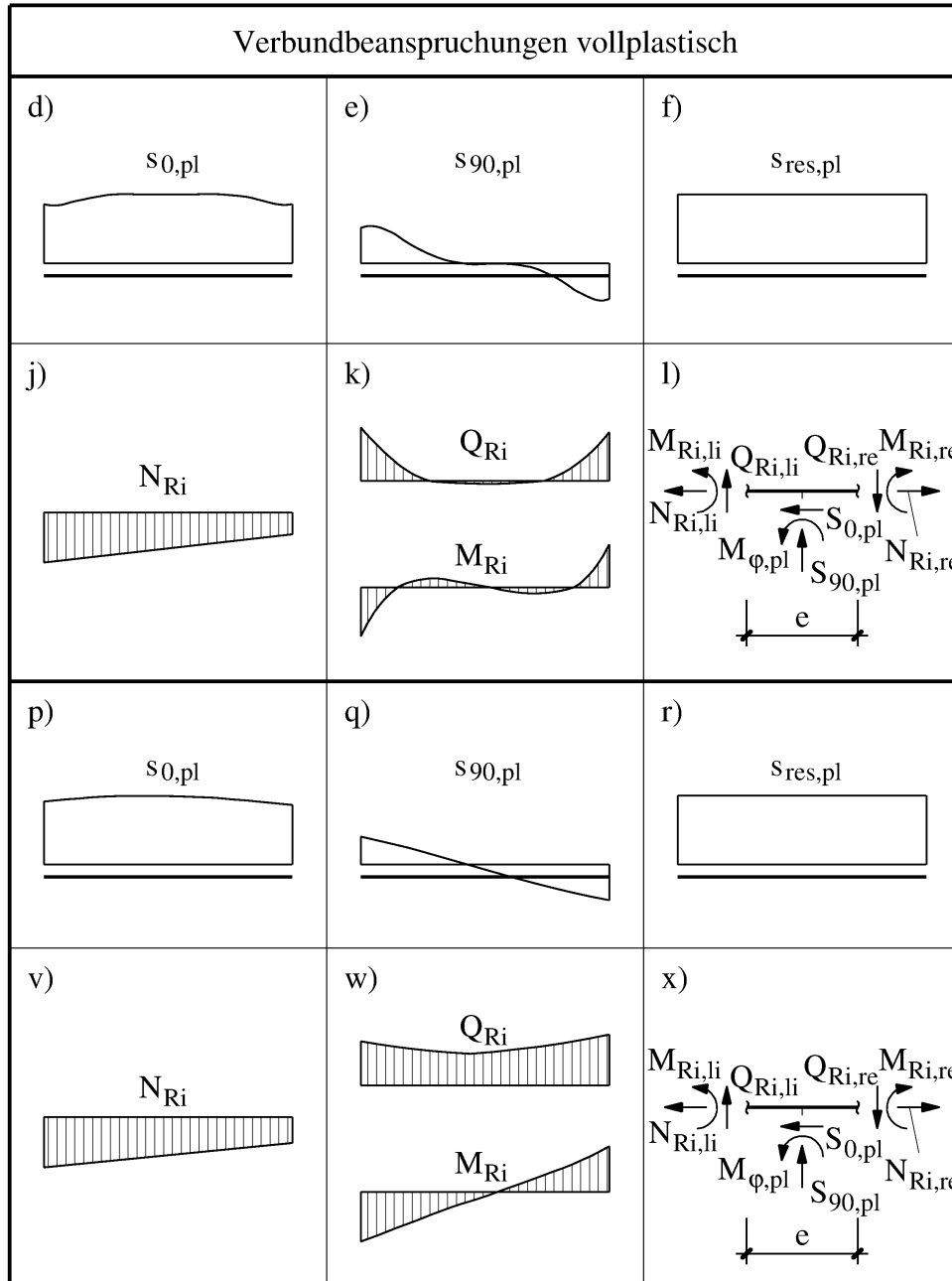
Die Verläufe der Verbundbeanspruchungen  $s_0$  und  $s_{90}$  an einer singulären Rippe, die mit einem Plattenrand verbunden ist, stellt Anders (2007) [1] unter Berücksichtigung der Rippensteifigkeit und für die starre Rippe dar.



**Bild 3-10:** Verbundbeanspruchungen und Schnittgrößen an einem Teil der durchlaufenden Kopfrippe einer Wandtafel

Durch die Annahme starrer Rippen kann eine Rippe unabhängig vom Verbund als eigenständiger starrer Stab im statischen Modell berücksichtigt werden. Am Beispiel der Kopfrippe der Wandtafel in Bild 1-1 werden die Unterschiede der Modellierung mit steifen und mit starren Rippen besonders deutlich, wenn man

den Teil der Kopfrippe detailliert betrachtet, der sich oberhalb der Fensteröffnung befindet (s. Bild 3-9).



In Bild 3-10 sind die Schnittgrößen  $N_{Ri}$ ,  $Q_{Ri}$  und  $M_{Ri}$  und die Verbundbeanspruchungen  $s_0$ ,  $s_{90}$  und  $s_{res}$  des zum einen als steif und zum anderen als starr angenommenen Rippenabschnitts im elastischen und im plastischen Grenzzustand gegenübergestellt. Die komplexen Verläufe der Verbundbeanspruchungen an der

steifen Rippe, die in Bild 3-10a-f dargestellt sind, vereinfachen sich durch die Annahme einer starren Rippe erheblich. Im elastischen Grenzzustand des Verbundes ist die Verbundbeanspruchung  $s_{0,el}$  parallel zur Rippenachse dann konstant (Bild 3-10m) und die Verbundbeanspruchung  $s_{90,el}$  senkrecht zur Rippenachse verläuft linear (Bild 3-10n).

Im plastischen Grenzzustand ist die resultierende Verbundbeanspruchung  $s_{res,pl}$ , die sich aus  $s_{0,pl}$  und  $s_{90,pl}$  ergibt, konstant. Mit diesen vereinfachten Verläufen lassen sich die Verbundbeanspruchungen und damit auch die Verbundsteifigkeiten zu je drei resultierenden Größen zusammenfassen, wie in den Kapiteln 3.4.1 und 3.5.1 beschrieben wird.

### 3.4 Elastischer Grenzzustand mit dem Weggrößenverfahren

#### 3.4.1 Modellierung des Verbundes mit resultierenden Steifigkeiten

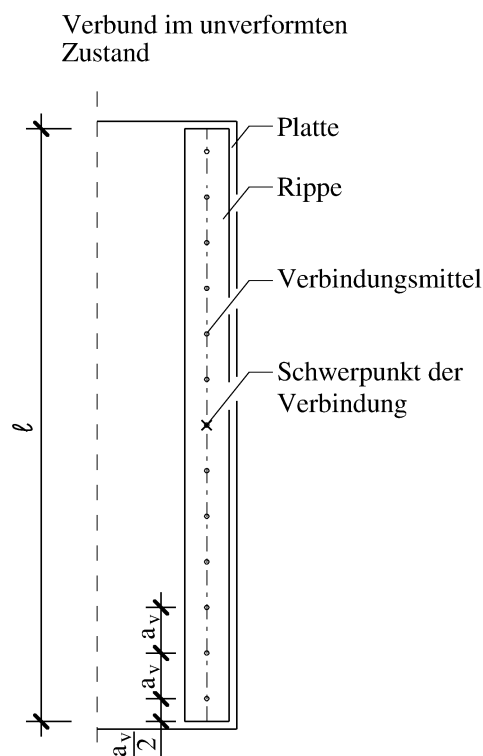
Bei der Fließverbundmethode besteht der Verbund der starren Rippen mit den starren Plattenrändern nicht aus einzelnen Verbindungsmitteln, sondern aus kontinuierlichen Verbindungen, für die das in Abschnitt 3.2 eingeführte ideal-elastisch-plastische Last-Verschiebungs-Verhalten angenommen wird. Dadurch wird die Anzahl der Freiheitsgrade, die das statische Modell besitzt, deutlich reduziert. Denn die Verschiebungsfreiheitsgrade der einzelnen Verbindungsmittel werden an jedem Plattenrand zu den drei resultierenden Weggrößen  $u$ ,  $w$  und  $\varphi$  zusammengefasst. Wenn die starre Rippe gegenüber dem starren Plattenrand um das Maß  $u$  parallel und das Maß  $w$  senkrecht zur Rippenachse verschoben und zusätzlich um den Winkel  $\varphi$  verdreht wird, erfahren die Verbindungsmittel Verschiebungen, deren Größe und Richtung von den drei resultierenden Weggrößen abhängen.

Bezogen auf den Verbindungsmittelabstand  $a_v$  erzeugen diese Verschiebungen Verbundbeanspruchungen  $s_0$  parallel und  $s_{90}$  senkrecht zur Rippenachse, die zu einer resultierenden Verbundbeanspruchung  $s_{res}$  zusammengefasst werden können.

Bild 3-12 zeigt die verschobene und verdrehte Rippe mit den zugehörigen Verbundbeanspruchungen im elastischen Grenzzustand des Verbundes, in welchem die maximale resultierende Verbundbeanspruchung der Verbundbeanspruchbar-



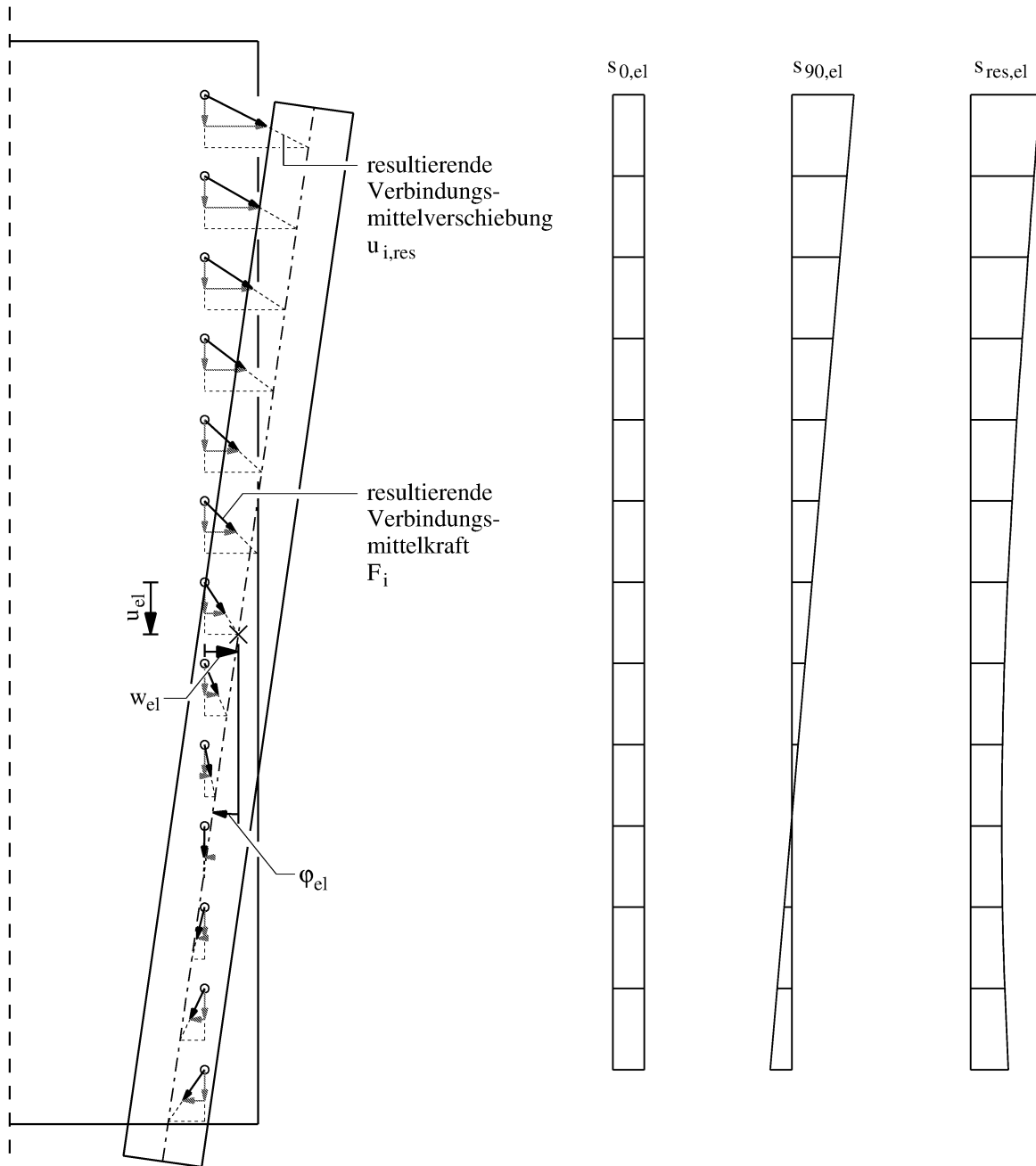
keit entspricht. Zum Vergleich ist in Bild 3-13 der plastische Grenzzustand dargestellt, der in Abschnitt 3.5.1 beschrieben wird. Solange  $s_{\text{res}}$  die längenbezogene Verbundbeanspruchbarkeit  $f_v$  in keinem Punkt überschreitet, verhält sich der Verbund linear-elastisch und kann durch die drei resultierenden Federsteifigkeiten  $C_0$ ,  $C_{90}$  und  $C_\varphi$  beschrieben werden. Analog zu den resultierenden Weggrößen definiert  $C_0$  die Wegfedersteifigkeit der Verbindung parallel zur Rippenachse,  $C_{90}$  die Wegfedersteifigkeit senkrecht und  $C_\varphi$  die Drehfedersteifigkeit. Die resultierenden Verbundsteifigkeiten  $C_0$ ,  $C_{90}$  und  $C_\varphi$  wirken im Schwerpunkt der Verbindung. In Bild 3-14 sind drei einfache Beispiele für statische Modelle mit resultierenden Verbundsteifigkeiten dargestellt.



**Bild 3-11:** Verbindung einer Rippe mit einer Platte durch einzelne Verbindungsmittel im Abstand  $a_v$

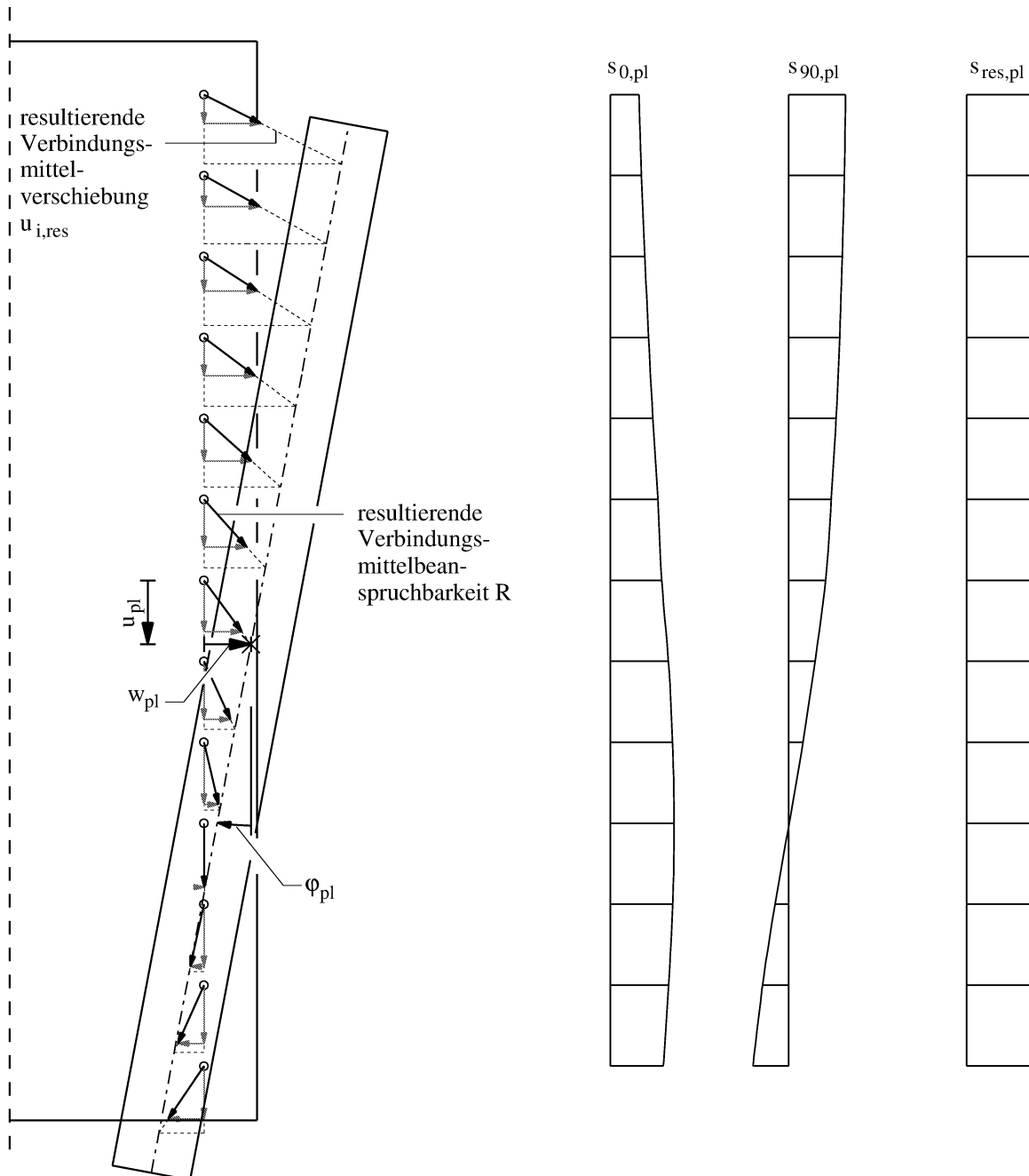
Die Größe dieser resultierenden Verbundsteifigkeiten kann aus dem Verschiebungsmodul  $K$  und dem Abstand  $a_v$  der Verbindungsmittel bestimmt werden.

Verbund im elastischen  
Grenzzustand

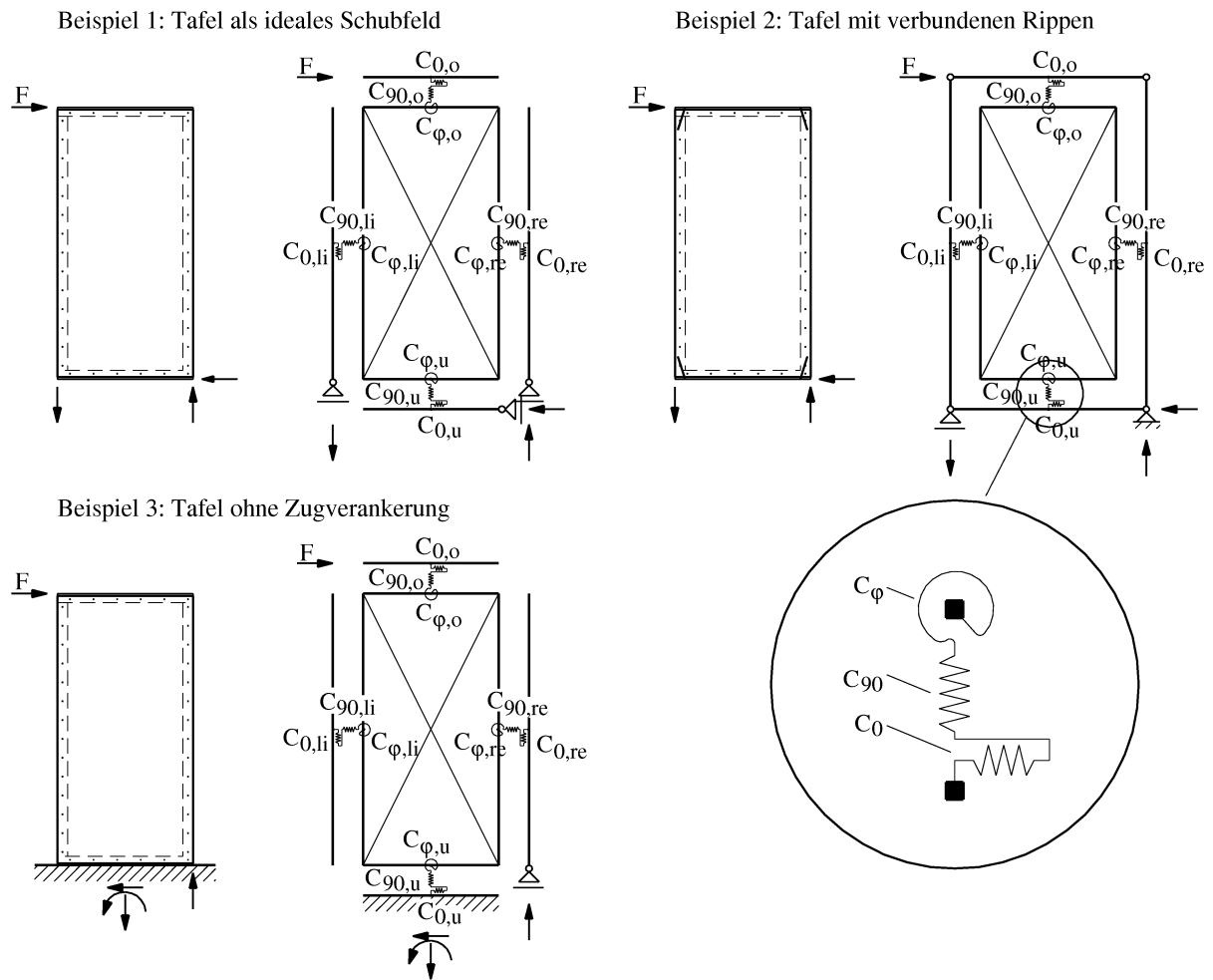


**Bild 3-12:** Um  $u_{el}$  und  $w_{el}$  verschobene und um  $\varphi_{el}$  verdrehte Verbindung aus Bild 3-11 und daraus folgende längenbezogene elastische Verbundbeanspruchungen  $s_{0,el}$ ,  $s_{90,el}$  und  $s_{res,el}$

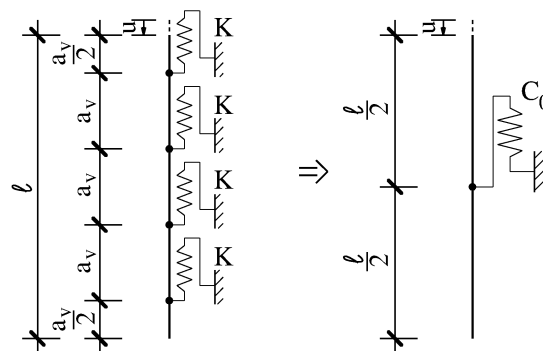
Verbund im plastischen  
Grenzzustand



**Bild 3-13:** Um  $u_{pl}$  und  $w_{pl}$  verschobene und um  $\phi_{pl}$  verdrehte Verbindung aus Bild 3-11 und daraus folgende längenbezogene plastische Verbundbeanspruchungen  $s_{0,pl}$ ,  $s_{90,pl}$  und  $s_{res,pl}$



**Bild 3-14:** Beispiele für statische Modelle einer einfachen Wandtafel mit unterschiedlichen Koppel- und Lagerbedingungen



**Bild 3-15:** Resultierende Verbundfedersteifigkeit  $C_0$  parallel zur Rippenachse

Wird die Rippe gegenüber dem Plattenrand ausschließlich um das Maß  $u$  parallel zur Rippenachse verschoben, so werden alle  $n$  Verbindungsmittel, die über die Verbindungslänge  $l$  im Abstand  $a_v$  verteilt sind, um  $u$  ausgelenkt. Entspre-

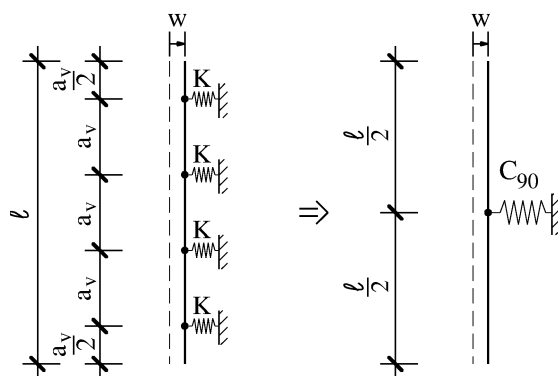
chend Bild 3-15 lautet dann die resultierende Federsteifigkeit parallel zur Rippenachse

$$C_0 = n \cdot K = \frac{K}{a_v} \ell. \quad (3.4)$$

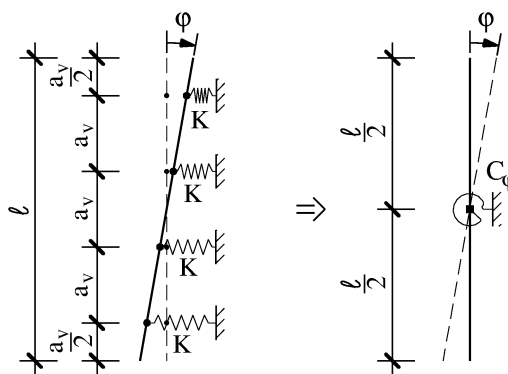
Eine Verschiebung der Rippe gegenüber dem Plattenrand um das Maß  $w$  senkrecht zur Rippenachse bewirkt eine einheitliche Auslenkung der einzelnen Verbindungsmittel um  $w$ . Auch hier lässt sich die resultierende Federsteifigkeit in Abhängigkeit von  $K$ ,  $\ell$  und  $a_v$  direkt angeben:

$$C_{90} = n \cdot K = \frac{K}{a_v} \ell \quad (3.5)$$

In Bild 3-16 ist die Reduktion der einzelnen Verschiebungsmoduln  $K$  auf eine resultierende Federsteifigkeit  $C_{90}$  dargestellt.



**Bild 3-16:** Resultierende Verbundfedersteifigkeit  $C_{90}$  senkrecht zur Rippenachse



**Bild 3-17:** Resultierende Drehfedersteifigkeit  $C_\varphi$

Einer Verdrehung  $\varphi$  der Rippe gegenüber der Beplankung wirkt die resultierende Drehfedersteifigkeit  $C_\varphi$  entgegen. Diese setzt sich aus den Wegfedersteifigkeiten der Verbindungsmittel senkrecht zum Beplankungsrand zusammen, wie

in Bild 3-17 demonstriert. In der Drehfeder wirkt das Moment  $M_\varphi$  als Produkt aus Drehfedersteifigkeit  $C_\varphi$  und Drehwinkel  $\varphi$ :

$$M_\varphi = C_\varphi \cdot \varphi \quad (3.6)$$

Für die Federkräfte  $F_i$  in den Verbindungsmitteln gilt:

$$F_i = K \cdot u_i \quad (3.7)$$

Dabei sind  $u_i$  die Verschiebungen der Verbindungsmittel infolge der Verdrehung  $\varphi$  der Rippe. Bezieht man die einzelnen Verbindungsmittelkräfte  $F_i$  auf den Verbindungsmittele Abstand  $a_v$ , so erhält man eine lineare Verbundbeanspruchung  $s_{90,el}$ , deren Maximum  $s_{90,el,max}$  ungefähr gleich der größten Verbindungsmittelkraft  $F_{max}$ , bezogen auf den Verbindungsmittele Abstand  $a_v$ , ist:

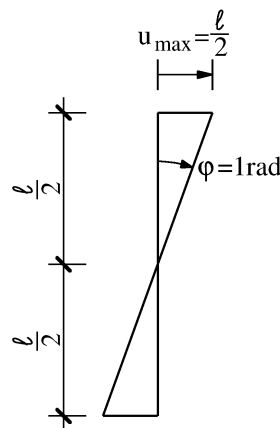
$$s_{90,max} \approx \frac{F_{max}}{a_v} \quad (3.8)$$

Aus Bild 3-18 folgt für kleine Drehwinkel  $\varphi$ :

$$F_{max} = K \cdot u_{max} = K \cdot \frac{\ell}{2} \quad (3.9)$$

Das durch die Verdrehung  $\varphi$  hervorgerufene elastische Moment  $M_{\varphi,el}$  wird durch die über die Rippenlänge  $\ell$  aufintegrierten Dreiecksflächen der Verbundbeanspruchung  $s_{90,el}$  mit den Hebelarmen  $\ell/3$  zum Drehpunkt gebildet:

$$M_{\varphi,el} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\ell}{2} \cdot s_{90,max} \cdot \frac{\ell}{2} \cdot \frac{2}{3} = s_{90,max} \cdot \frac{\ell^2}{6} \quad (3.10)$$



**Bild 3-18:** Maximale Verbindungsmitteleverschiebung  $u_{max}$  infolge einer Verdrehung  $\varphi=1$

Dieses elastische Moment  $M_{\varphi,el}$ , bezogen auf eine Verdrehung  $\varphi = 1\text{rad}$ , liefert die Drehfedersteifigkeit  $C_{\varphi}$ . Durch Einsetzen von Gl. (3.8) und Gl. (3.9) in Gl. (3.10) lässt sich die Drehfedersteifigkeit  $C_{\varphi}$  wie folgt anschreiben:

$$C_{\varphi} = \frac{M_{\varphi,el}}{1\text{rad}} = \frac{K}{a_v} \cdot \frac{\ell^3}{12} \cdot \frac{1}{\text{rad}} \quad (3.11)$$

### 3.4.2 Statisches Modell

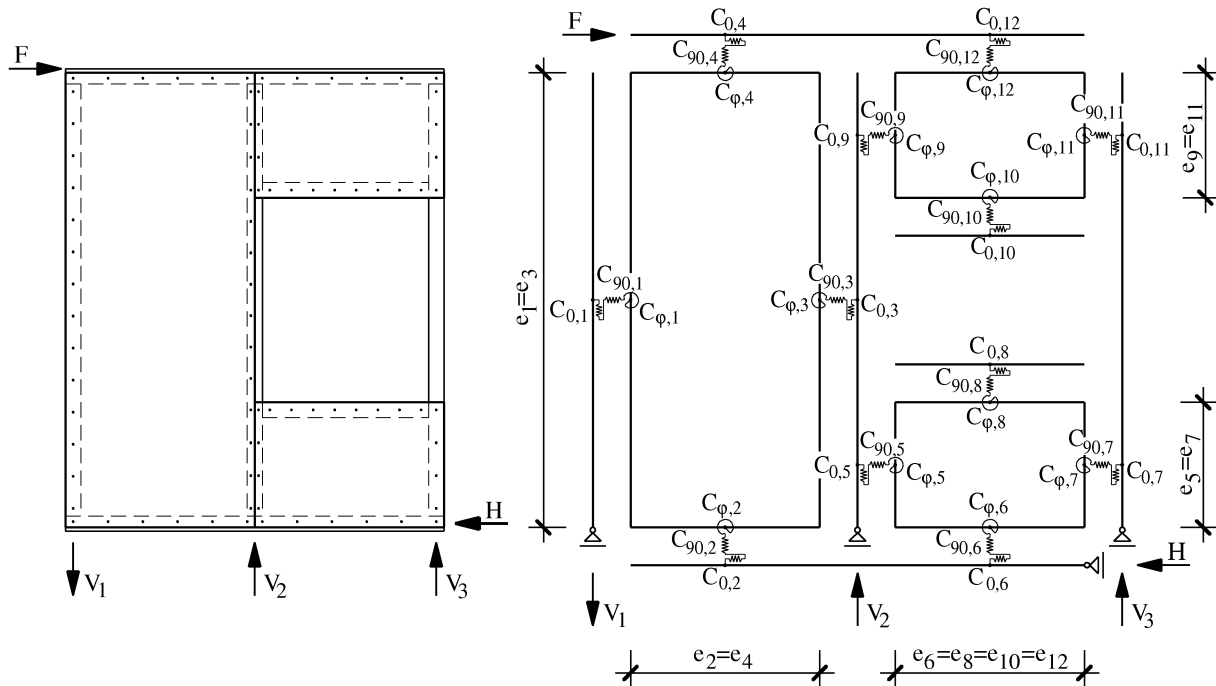
Unter Berücksichtigung der in Kap. 3.1 beschriebenen Vereinfachungen besteht das vereinfachte statische Modell bei der Fließverbundmethode aus starren Rippenstäben, die durch Einzelfedern mit den in Kap. 3.4.1 beschriebenen resultierenden Steifigkeiten  $C_0$ ,  $C_{90}$  und  $C_{\varphi}$  an die starren Platten der Beplankung angeschlossen sind. Das statische Modell ist ausschließlich an den Rippen gelagert, so dass die starren Beplankungskörper mit den Verbundfedern quasi „schwimmend“ an die Rippen angeschlossen sind. Bild 3-14 zeigt drei vereinfachte Stabmodelle einer Wandtafel mit unterschiedlichen Lager- und Koppelbedingungen. Der gesamte Verbund wurde hier auf vier Verbindungen reduziert, die jeweils aus den drei Verbundfedern bestehen. Wenn durchlaufende Rippen im realen Tragwerk an mehrere Plattenränder angeschlossen sind, wird dies im vereinfachten Stabmodell durch eine entsprechende Anzahl von Verbindungen berücksichtigt. In der Wandtafel in Bild 3-19 sind bis auf die linke Randrippe sowie die Brüstungs- und Sturzrippen alle Rippen mit zwei Plattenrändern verbunden. Folglich besitzt das statische Modell hier zwölf Rippe-Platte-Verbindungen, die jeweils mit den drei resultierenden Verbundfedern im Schwerpunkt der Verbindung modelliert werden. Die Federsteifigkeiten  $C_{0,i}$ ,  $C_{90,i}$  und  $C_{\varphi,i}$  können nach Kap. 3.4.1 für jede Verbindung  $i$  abhängig von ihrer Verbundlänge  $e_i$  und der Verbundsteifigkeit  $K/a_v$  bestimmt werden.

Bei über mehrere Plattenränder durchlaufenden Rippen ist zu beachten, dass die Rippen aufgrund der angenommenen Biegestarrheit verhältnismäßig große Biegemomente erfahren, die in der realen Struktur nicht auftreten, da sich die Rippen diesen Beanspruchungen infolge ihrer geringen Biegesteifigkeiten größtenteils entziehen. Ein Beispiel hierfür zeigt der Vergleich der Beanspruchungen von Kopf- und Fußrippe der Wandtafel in Bild 1-4h und m. Um die Fließverbundmethode besser an das tatsächliche Verformungsverhalten der Tafel anzupassen, könnten die durchlaufenden Rippen in mehrere Teile gegliedert werden, die durch Momentengelenke miteinander verbunden sind. Hinsichtlich der An-

zahl und der Anordnung dieser Gelenke sind weitere Forschungen erforderlich, wie im Ausblick in Kapitel 5 erläutert wird.

Ansicht Wandtafel

Statisches Modell der Wandtafel



**Bild 3-19:** Beispiel für das vereinfachte Stabmodell einer Wandtafel mit 12 Verbindungen, die durch je drei resultierende Federsteifigkeiten modelliert werden

### 3.4.3 Anwendung des Weggrößenverfahrens bei der Fließverbundmethode

Die linear-elastische Berechnung der Verbundbeanspruchungen und der Schnittgrößen in den Rippen von Tafelkonstruktionen, die mit den vereinfachten Stabmodellen der Fließverbundmethode modelliert wurden, kann mit Hilfe des Weggrößenverfahrens erfolgen, das u. a. von Duddeck und Ahrens in [12] vorgestellt wurde und das hier an die Fließverbundmethode angepasst wird. Die Berechnung geht vom kinematisch bestimmten Hauptsystem aus. Die kinematische Bestimmtheit wird mit der Einführung zusätzlicher Bindungen erreicht, durch welche die Verschiebungen und Verdrehungen sämtlicher Rippen und Platten Null sind. Im Gegensatz zum kinematisch bestimmten Hauptsystem weist das tatsächliche System zunächst noch unbekannte Verschiebungen und Verdrehungen der Rippen und Platten auf. Zur Berechnung dieser Weggrößen gibt man nacheinander je eine Zusatzbindung des Hauptsystems frei und bringt Einheitsverformungszustände auf. Jeder dieser Zustände erfüllt die Verfor-



mungsbedingungen, das Gleichgewicht ist aber nicht erfüllt. Anschließend wird ein lineares Gleichungssystem mit allen Einheitsverformungszuständen aufgestellt, das zunächst unbekannte Faktoren für die Einheitsverformungszustände enthält. Durch Lösen des Gleichungssystems erhält man die Faktoren, für welche die zusätzlichen Bindungen des Hauptsystems in der Superposition aller Zustände kräftefrei und damit überflüssig sind. Im Einzelnen gliedert sich die Berechnung in folgende Schritte:

### **1. Darstellung der zu berechnenden Tafelstruktur als vereinfachtes Stabmodell**

Das vereinfachte Stabmodell wird nach den in Kap. 3.4.2 angegebenen Regeln aufgestellt.

### **2. Kinematisch bestimmtes Hauptsystem festlegen**

Das vereinfachte Stabmodell aus 1. wird mit  $m$  zusätzlichen Bindungen ergänzt, so dass es kinematisch bestimmt ist. Die einzelnen Rippen und Platten können dadurch unabhängig voneinander betrachtet werden.

### **3. Lastverformungszustand am Hauptsystem infolge eines Einheitslastzustandes ermitteln**

Der Lastverformungszustand erfüllt am Hauptsystem nur die Verformungsbedingungen. Die Gleichgewichtsbedingungen sind noch nicht erfüllt.

### **4. Einheitsverformungszustände ansetzen**

Ansatz von  $m$  linear unabhängigen Einheitsverformungszuständen  $w^j$  ( $j = 1 \dots m$ ) und der zugehörigen resultierenden Verbundschnittgrößen  $S_{90,el,i}$ ,  $S_{0,el,i}$  und  $M_{\varphi,el,i}$  in jeweils eine Systemskizze. Dabei entspricht  $i = 1 \dots n$  der Anzahl der resultierenden Verbindungen. Die Verbundschnittgrößen werden in den Federn freigeschnitten und können folglich aus den elastischen Federsteifigkeiten  $C_{0,i}$ ,  $C_{90,i}$  und  $C_{\varphi,i}$  berechnet werden.

Beim Ansatz der Einheitsverformungszustände ist zu beachten, dass die positiven Richtungen der Verschiebungen und Verdrehungen der Rippen denen der Platten entgegengesetzt sind.

### **5. Gleichungssystem aufstellen**

Anschreiben der  $m$  Gleichgewichtsbedingungen für die Rippen und die Platten in der Reihenfolge  $j = 1 \dots m$ . Bei Beachtung dieser Reihenfolge ergibt

sich ein symmetrisches Gleichungssystem für die Faktoren  $\gamma_j$  der Einheitsverformungszustände.

## 6. Gleichungssystem lösen

Lösen des linearen Gleichungssystems nach den  $\gamma_j$ .

## 7. Schnittgrößen $S_{90,el,i}$ , $S_{0,el,i}$ und $M_{\varphi,el,i}$ infolge eines Einheitslastzustandes berechnen

Die elastischen Schnittgrößen infolge einer äußeren Einheitslast werden aus der Superposition berechnet. Z. B. ist  $S_{0,el,i} = \sum(\gamma_j \cdot S_{0,j})$  an der Stelle  $i$ .

## 8. Elastische Grenzlast und plastische Federn ermitteln

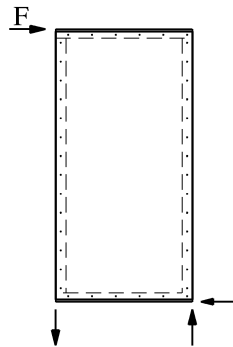
Bis zum Erreichen der elastischen Grenzlast, d. h. bis zum Fließen des ersten Verbindungsmittels, sind die Schnittgrößen  $S_{90,el,i}$ ,  $S_{0,el,i}$  und  $M_{\varphi,el,i}$  proportional zur äußeren Last. Folglich kann die elastische Grenzlast durch Multiplikation des äußeren Einheitslastzustandes aus Schritt 7) mit einem Lastfaktor berechnet werden. Aus dem elastischen Grenzzustand ist ersichtlich, an welchen Stellen der Verbund der Tafelstruktur seine Fließgrenze erreicht.

Das Verfahren wird im Folgenden auf die drei Beispiele in Bild 3-14 angewendet.

### 3.4.4 Beispiel 1: Tafel mit starren Rippen als ideales Schubfeld

Eine Tafel wie in Bild 3-20, die aus vier Rippen besteht, die untereinander nicht direkt verbunden sind, die aber kontinuierlich mit den vier Rändern einer Platte verbunden sind, und die an den Randrippen vertikal und an der Fußrippe horizontal gelagert ist, trägt eine an der Kopfrippe horizontal innerhalb der Tafel Ebene angreifende Kraft als ideales Schubfeld ab. Dabei wird die Beplankung ideal auf Schub beansprucht, während die Rippen ausschließlich Normalkraftbeanspruchungen erfahren. Das statische Modell ist äußerlich statisch bestimmt, so dass die Auflagerreaktionen direkt aus den Gleichgewichtsbedingungen folgen. Bild 3-21a zeigt das vereinfachte Stabmodell dieser Tafel mit den resultierenden Verbundsteifigkeiten. Durch Freischneiden in den Verbindungen (Bild 3-21c) können die resultierenden Verbundschnittgrößen direkt aus dem Gleichgewicht bestimmt werden.

Alternativ wird im Folgenden die Berechnung der Verbundschnittgrößen mit dem in Abschnitt 3.4.3 beschriebenen Weggrößenverfahren gezeigt.



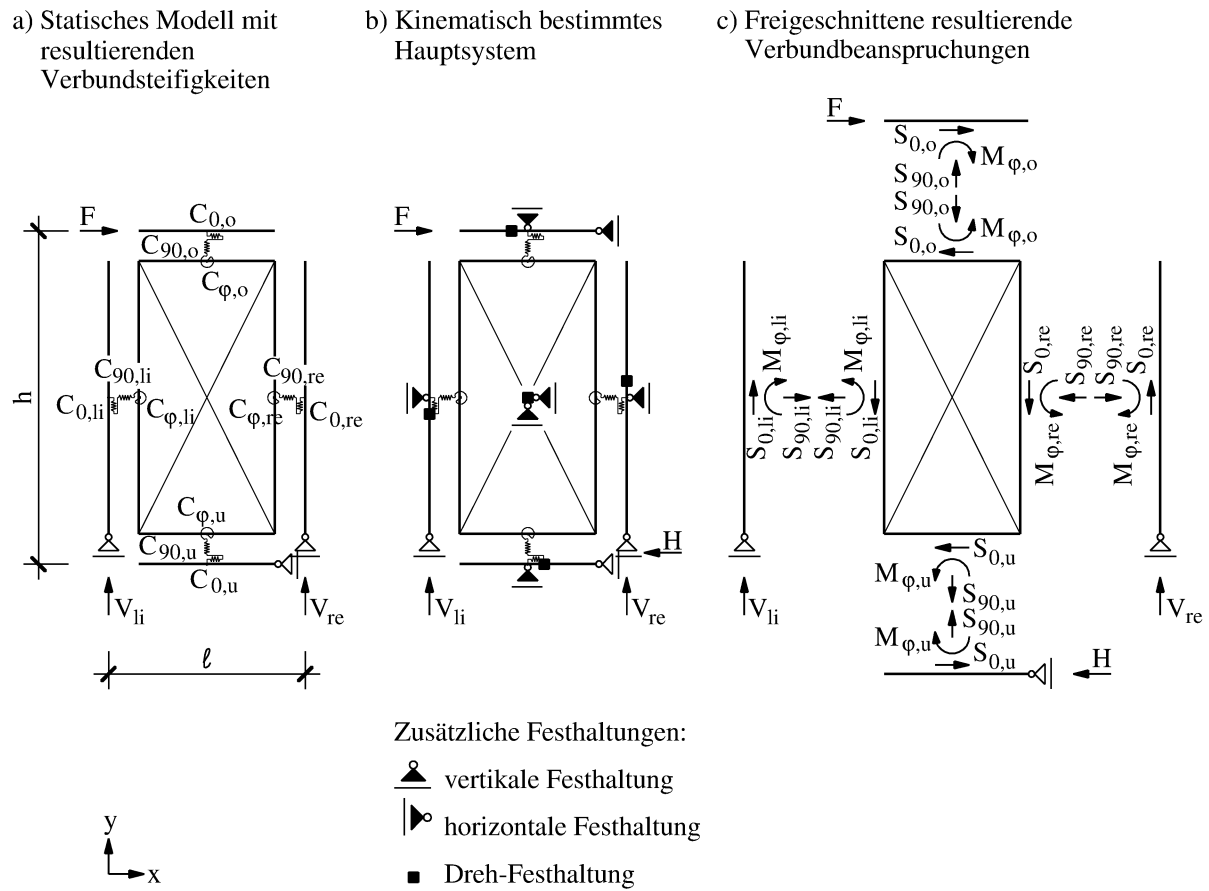
**Bild 3-20:** Tafel mit vier starren Rippen, die nicht miteinander verbunden sind, und einer starren Platte, die kontinuierlich mit den Rippen verbunden ist (ideales Schubfeld)

Zunächst wird die kinematische Bestimmtheit untersucht: Da die Rippen untereinander nicht verbunden sind, besitzt jede Rippe drei Freiheitsgrade. Die Platte besitzt ebenfalls drei Freiheitsgrade. Drei dieser insgesamt 15 Freiheitsgrade sind durch die Lagerbedingungen der Tafel festgehalten. Folglich ist die Tafel 12-fach kinematisch unbestimmt. Durch Einführung von zwölf zusätzlichen Festhaltungen, die in Bild 3-21b schwarz dargestellt sind, erhält man das kinematisch bestimmte Hauptsystem.

Die äußere Last  $F$  erzeugt am kinematisch bestimmten Hauptsystem (Bild 3-21b) keine Verschiebungen und somit keine Schnittgrößen. Nun werden zwölf Einheitsverschiebungszustände angesetzt und die daraus resultierenden Verbundschnittgrößen berechnet, mit denen anschließend die längenbezogenen Verbundbeanspruchungen  $s_{0,el}$  und  $s_{90,el}$  und die Schnittkraftverläufe in den Rippen bestimmt werden können. Die ausführliche Berechnung ist im Anhang D dargestellt.

Wie erwartet, wird der Verbund ausschließlich parallel zu den Plattenrändern beansprucht. Da die längenbezogene Verbundbeanspruchbarkeit  $f_{v,0}$  hier einem umlaufend konstanten Schubfluss  $s_0$  entspricht (Bild 3-22b), beträgt die an der Kopfrippe angreifende elastische Grenzlast

$$F_{el} = f_{v,0} \cdot \ell = \frac{R\ell}{a_v}. \quad (3.12)$$

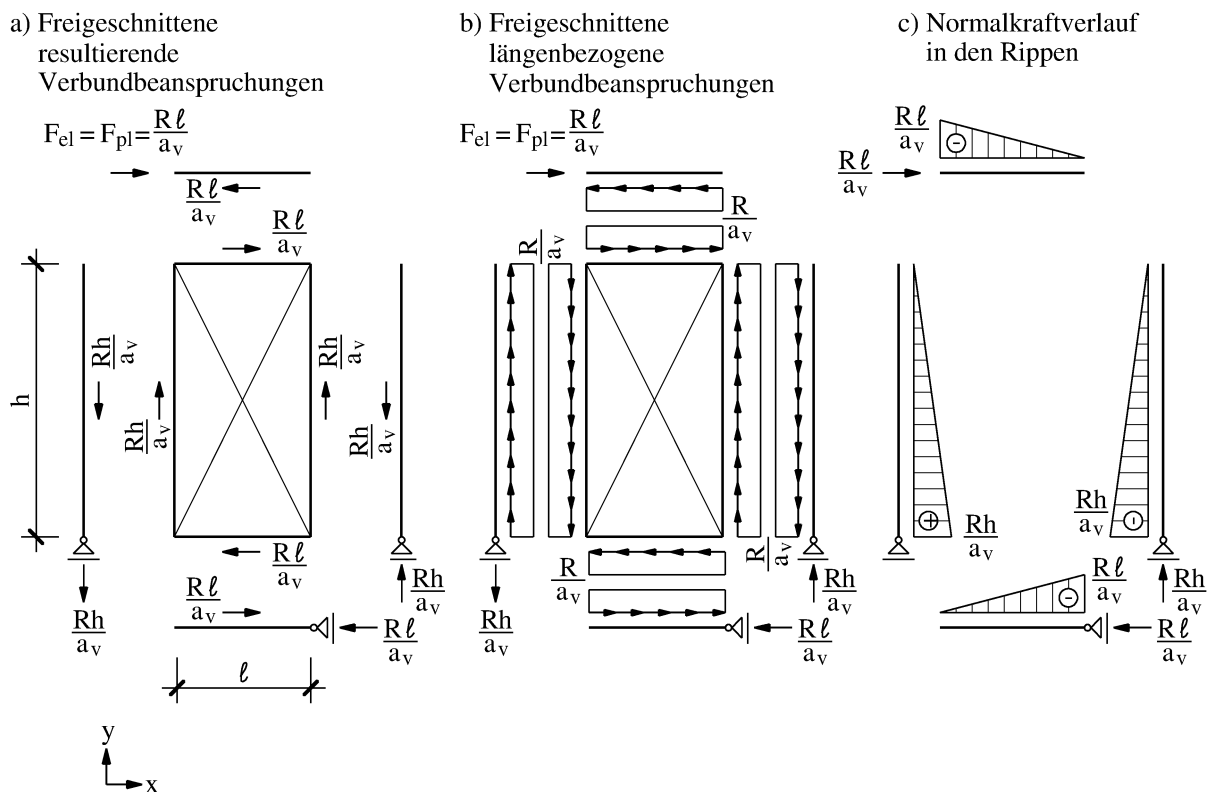


**Bild 3-21:** Modellierung der Tafel aus Bild 3-20

Infolge des konstanten Schubflusses  $s_0$  erreichen sämtliche Verbindungsmittel gleichzeitig ihre Fließgrenze, so dass die aufnehmbare Last  $F_{pl}$  im plastischen Grenzzustand gleich der elastischen Grenzlasterlast  $F_{el}$  ist:

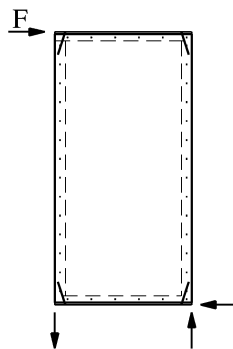
$$F_{pl} = \frac{R\ell}{a_v}. \quad (3.13)$$

Die Verbundbeanspruchungen und die Normalkraftverläufe in den Rippen im elastischen und damit auch im plastischen Grenzzustand sind in Bild 3-22 dargestellt.



**Bild 3-22:** Freigeschnittene Verbundbeanspruchungen der Tafel aus Bild 3-20 sowohl im elastischen als auch im plastischen Grenzzustand

### 3.4.5 Beispiel 2: Tafel mit gelenkig verbundenen starren Rippen

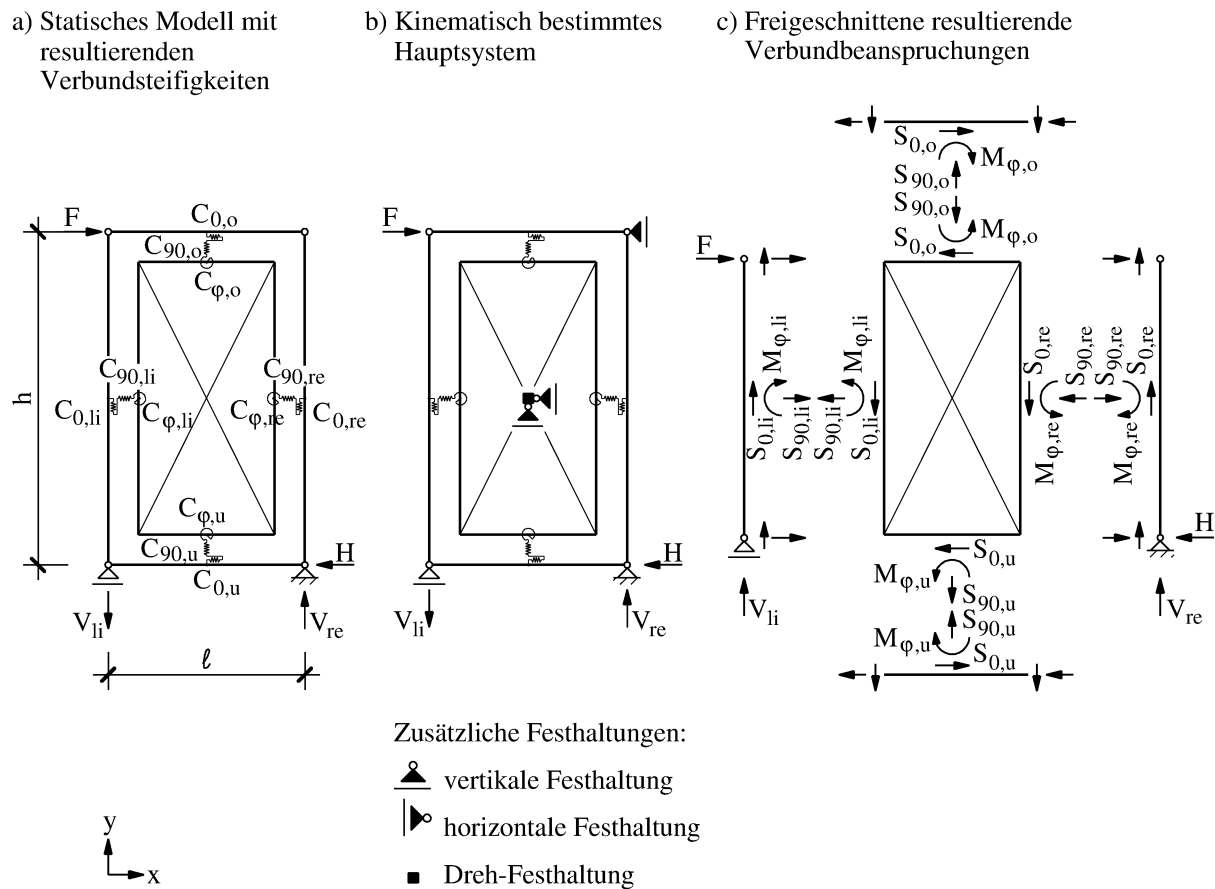


**Bild 3-23:** Tafel mit vier starren Rippen, die gelenkig miteinander verbunden sind, und einer starren Platte, die kontinuierlich mit den Rippen verbunden ist

Die in Bild 3-23 dargestellte Wandtafel entspricht der Wandtafel aus Abschnitt 3.4.4 bzw. Anhang D mit dem Unterschied, dass die Rippen hier an ihren Enden miteinander verbunden sind. Diese Verbindungen können z. B. mit schräg eingebrachten Holzschrauben hergestellt werden und ermöglichen eine direkte Kraftübertragung von Rippe zu Rippe. Die einwirkende Last  $F$  wird dann teils

direkt über die Rippenverbindungen teils indirekt über den Verbund und die Beplankung in die Auflager geleitet.

Obwohl die Tafel äußerlich statisch bestimmt ist, können die Verbundbeanspruchungen und die Schnittgrößen in den Rippen nicht mehr allein aus dem Gleichgewicht bestimmt werden, da die gelenkigen Verbindungen der Rippen untereinander eine innere statische Unbestimmtheit bewirken.



**Bild 3-24:** Modellierung der Tafel aus Bild 3-23

Das vereinfachte statische Modell der Tafel ist in Bild 3-24 dargestellt. Wegen der gelenkigen Verbindungen der Rippen untereinander können sich die Rippen nur parallelogrammartig gemeinsam verschieben. Mit der starren Lagerung der Fußrippe bleibt den Rippen nur ein einziger horizontaler Verschiebungsfreiheitsgrad. Die Beplankung, welche hier aus einer einzelnen starren Platte besteht, ist mit allen vier Rändern über den nachgiebigen Verbund an die Rippen angeschlossen. Demnach kann sie in x- und in y-Richtung verschoben und um die z-Achse verdreht werden. Insgesamt besitzt die Tafel somit nur vier Freiheitsgrade, d. h. sie ist vierfach kinematisch unbestimmt.

Durch die vier in Bild 3-24b dargestellten zusätzlichen Festhaltungen erhält man das kinematisch bestimmte Hauptsystem, mit dem die resultierenden Verbundbeanspruchungen (Bild 3-24c) nach dem Weggrößenverfahren aus Kap. 3.4.3 bestimmt werden können. Die vollständige analytische Lösung ist im Anhang E dargestellt.

Die resultierenden Verbundschnittgrößen und die Kräfte, die in den Gelenken von einer Rippe zur anderen übertragen werden müssen, sind in Bild 3-25a dargestellt. Aus den resultierenden Verbundschnittgrößen  $M_{\varphi,i}$  und  $S_{0,i}$  können die längenbezogenen Verbundbeanspruchungen  $s_0$  parallel und  $s_{90}$  senkrecht zu den Plattenrändern bestimmt werden, wie in Bild 3-25b gezeigt. Die maximale resultierende längenbezogene Verbundbeanspruchung  $s_{\text{res,max}}$  (Bild 3-25c) ergibt sich demnach für eine Last  $F$ , die kleiner als die elastische Grenzlast  $F_{\text{el}}$  ist, jeweils an den Enden der Rippen zu

$$s_{\text{res,max}} = \sqrt{s_0^2 + s_{90}^2} = \frac{3F\gamma}{\alpha\beta\ell} \quad (3.14)$$

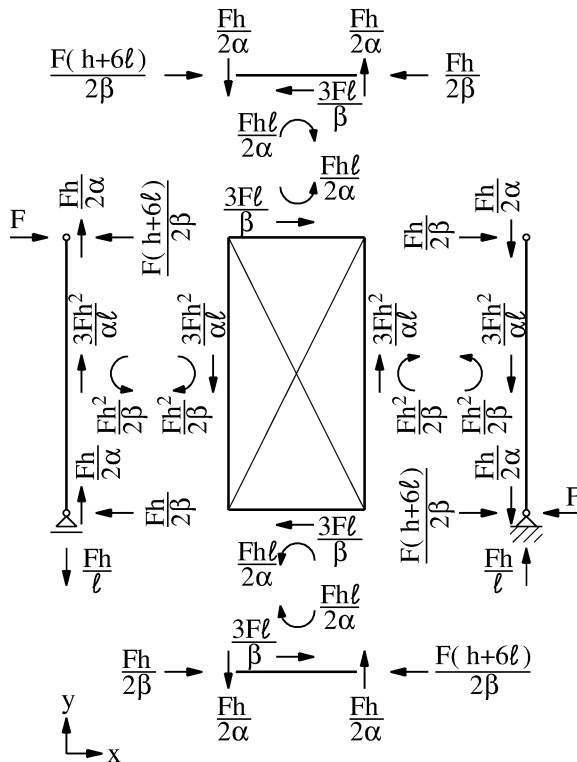
mit  $\alpha = 3h + \ell$   
 $\beta = h + 3\ell$   
 $\gamma = \sqrt{h^4 + 6h^3\ell + 18h^2\ell^2 + 6h\ell^3 + \ell^4}$

Die elastische Grenzlast  $F_{\text{el}}$  ist erreicht, wenn die maximale resultierende längenbezogene Verbundbeanspruchung  $s_{\text{res,max}}$  gleich der längenbezogenen Verbundbeanspruchbarkeit  $R/a_v$  ist:

$$F_{\text{el}} = \frac{R}{a_v} \cdot \frac{\alpha\beta\ell}{3\gamma} \quad (3.15)$$

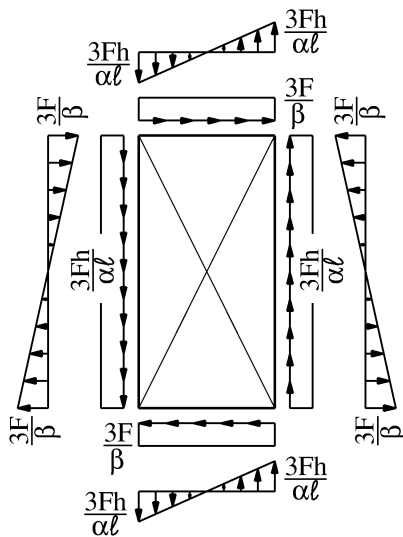
Tuomi und McCutcheon geben in [45] auch eine analytische Lösung für die elastische Grenzlast scheibenartig beanspruchter Wandtafeln an, deren Rippen sich parallelogrammartig verschieben und deren Verbindungsmittel sich linear-elastisch Verhalten. Die benötigten Eingangsgrößen sind die Wandgeometrie, die Anzahl der Nagelabstände und die elastische Beanspruchbarkeit des einzelnen Nagels.

- a) Freigeschnittene resultierende Verbundbeanspruchungen und Gelenkkräfte

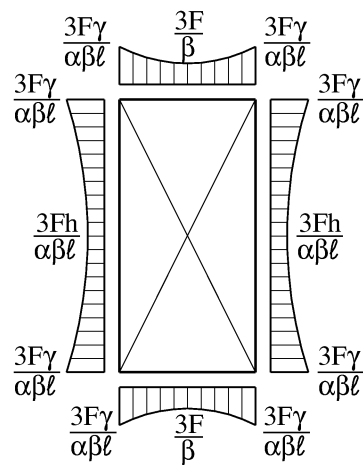


mit  $\alpha = 3h + l$   
 $\beta = h + 3l$   
 $\gamma = \sqrt{h^4 + 6h^3l + 18h^2l^2 + 6hl^3 + l^4}$

- b) Längenbezogene Verbundbeanspruchungen an den Plattenrändern



- c) Resultierende längenbezogene Verbundbeanspruchungen an den Plattenrändern



**Bild 3-25:** Freigeschnittene Verbundbeanspruchungen und Gelenkkräfte der Tafel aus Bild 3-24 mit elastischem Verbund



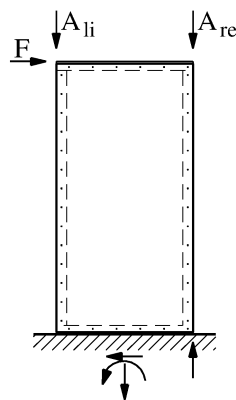
Källsner gibt in [24] ebenfalls eine Gleichung zur Bestimmung der elastischen Grenzlast  $F_{el}$  einer Tafel mit gelenkig verbundenen starren Rippen an:

$$F_{el} = \frac{R}{h \sqrt{\left( \frac{\hat{x}_{\max}}{\sum_{i=1}^N \hat{x}_i^2} \right)^2 + \left( \frac{\hat{y}_{\max}}{\sum_{i=1}^N \hat{y}_i^2} \right)^2}} \quad (3.16)$$

Voraussetzung für die Anwendung dieser Gleichung ist allerdings die Kenntnis oder die Annahme der Koordinaten  $\hat{x}_i$  und  $\hat{y}_i$  aller  $N$  Verbindungsmittel.  $R$  ist die Beanspruchbarkeit des einzelnen Verbindungsmittels während  $h$  die Tafelhöhe repräsentiert. Mit steigender Anzahl von Verbindungsmitteln ist die Bestimmung der elastischen Grenzlast  $F_{el}$  nach Gl.(3.16) aufwändiger als nach der hier vorgestellten Gl.(3.15).

### 3.4.6 Beispiel 3: Tafel mit starren Rippen ohne Zugverankerung

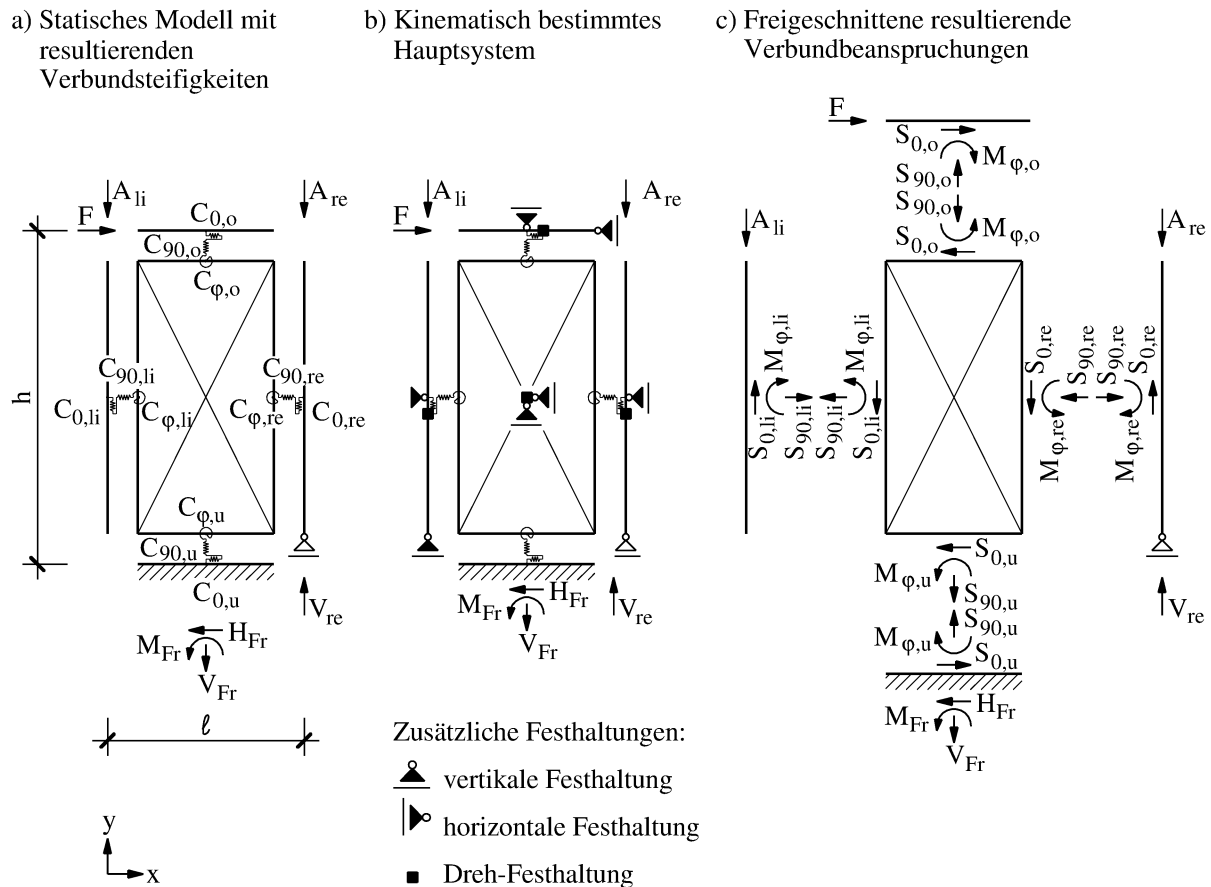
Zugverankerungen verhindern das Abheben der vertikalen Randrippen, wenn z. B. Wandtafeln in der Tafelebene durch Horizontallasten beansprucht werden. Abhängig von der Größe der Horizontallasten und der Geometrie der Tafel kann auf diese Zugverankerungen verzichtet werden, wenn die stabile Lage der Tafel durch ausreichend große Vertikallasten gesichert ist. Solche Vertikallasten sind in jedem Gebäude durch das Eigengewicht der Tafel und der darüberliegenden Konstruktion vorhanden. Bild 3-26 zeigt eine solche Wandtafel, die durch eine Horizontallast  $F$  und durch vertikale Auflasten  $A_{li}$  und  $A_{re}$  beansprucht wird und die keine Zugverankerungen besitzt.



**Bild 3-26:** Tafel ohne Zugverankerung der vertikalen Rippen

Wenn die Randrippe in einer Tafel ohne Zugverankerungen infolge zu geringer Auflasten dennoch abhebt, kann der Verbund zwischen unterem Plattenrand und

Fußrippe diesem Abheben entgegenwirken. Voraussetzung dafür ist, dass einerseits die Fußrippe mit der darunterliegenden Konstruktion, z. B. der Stahlbeton-Bodenplatte, nahezu kontinuierlich verbunden ist. Andererseits muss der Verbund zwischen Platte und Fußrippe neben den Beanspruchungen  $s_0$  parallel zum Plattenrand auch Beanspruchungen  $s_{90}$  senkrecht zum Plattenrand aufnehmen können.



**Bild 3-27:** Modellierung der Tafel aus Bild 3-26

In Bild 3-27a ist das statische Modell der Tafel aus Bild 3-26 mit den resultierenden Verbundsteifigkeiten dargestellt. Infolge der fehlenden Zugverankerung entstehen in der Verbindung zwischen der Fußrippe und der darunter liegenden Konstruktion die resultierenden Auflagerreaktionen  $H_{Fr}$ ,  $V_{Fr}$  und  $M_{Fr}$ .

Die Kopfriple, die linke Randrippe und die Platte besitzen je zwei Verschiebungsfreiheitsgrade und einen Verdrehungsfreiheitsgrad. Die rechte Randrippe ist vertikal gelagert und besitzt somit zwei kinematische Freiheitsgrade. Die Fußrippe ist starr gelagert. Insgesamt ist das statische Modell in Bild 3-27a somit 11-fach kinematisch unbestimmt. Mit den in Bild 3-27b schwarz dargestellten zusätzlichen Festhaltungen erhält man das kinematisch bestimmte Hauptsystem.

tem, mit welchem die resultierenden Verbundbeanspruchungen und die Auflagerreaktionen in Bild 3-27c bestimmt werden können. Dazu kommt das in Abschnitt 3.4.3 beschriebene Weggrößenverfahren zur Anwendung, wie im Anhang F ausführlich gezeigt wird.

Aus der Anwendung des Weggrößenverfahrens folgen die resultierenden Verbundschnittgrößen, die in Bild 3-28a dargestellt sind. Mit den resultierenden Verbundschnittgrößen  $S_{0,i}$ ,  $S_{90,i}$  und  $M_{\varphi,i}$  können die längenbezogenen Verbundbeanspruchungen  $s_0$  parallel und  $s_{90}$  senkrecht zu den Plattenrändern bestimmt werden. Am unteren Plattenrand beträgt die maximale längenbezogene Verbundbeanspruchung  $s_{90,u,max}$  senkrecht zum Plattenrand

$$s_{90,u,max} = \frac{6M_{\varphi,u}}{\ell^2} + \frac{S_{90,u}}{\ell} = \frac{6h(2h + \ell)}{\ell^2(4h + \ell)} F - \frac{4(3h + \ell)}{\ell(4h + \ell)} A_{li}. \quad (3.17)$$

In Bild 3-28b wird diese an der linken unteren Plattenecke erreicht. An der rechten unteren Plattenecke beträgt die längenbezogene Verbundbeanspruchung  $s_{90,u,re}$  senkrecht zum Plattenrand

$$s_{90,u,re} = -\frac{6M_{\varphi,u}}{\ell^2} + \frac{S_{90,u}}{\ell} = -\frac{6h}{\ell(4h + \ell)} F + \frac{2}{4h + \ell} A_{li}. \quad (3.18)$$

Die maximale resultierende längenbezogene Verbundbeanspruchung  $s_{res,max}$  ergibt sich aus der Überlagerung von  $s_0$  und  $s_{90,max}$  an der linken unteren Ecke der Platte (Bild 3-28c):

$$s_{res,max} = \sqrt{s_0^2 + s_{90,u,max}^2} = \sqrt{\left(\frac{F}{\ell}\right)^2 + \left(\frac{6h(2h + \ell)}{\ell^2(4h + \ell)} F - \frac{4(3h + \ell)}{\ell(4h + \ell)} A_{li}\right)^2} \quad (3.19)$$

Die elastische Grenzlast  $F_{el}$  ist erreicht, wenn die maximale resultierende längenbezogene Verbundbeanspruchung  $s_{res,max}$  gleich der längenbezogenen Verbundbeanspruchbarkeit  $R/a_v$  ist:

$$\sqrt{\left(\frac{F_{el}}{\ell}\right)^2 + \left(\frac{6h(2h + \ell)}{\ell^2(4h + \ell)} F_{el} - \frac{4(3h + \ell)}{\ell(4h + \ell)} A_{li}\right)^2} = \frac{R}{a_v} \quad (3.20)$$

Auflösen von Gl.(3.20) nach  $F_{el}$  liefert den sehr länglichen Ausdruck für die elastische Grenzlast, der hier nicht dargestellt wird.



### 3.5 Plastischer Grenzzustand mit der Fließverbundmethode

Der elastische Grenzzustand eines Tafelmodells, der mit dem in Kap. 3.4 vorgestellten Verfahren bestimmt werden kann, dient als Grundlage für die Bestimmung des plastischen Grenzzustandes mit der Fließverbundmethode, das in diesem Kapitel erläutert wird. Anders als beim rein elastischen Tragverhalten des Verbundes hängt die Größe der Verbundbeanspruchungen des plastischen Verbundes von der Richtung ab, in welcher die Verbindungsmittel beansprucht werden, wie z. B. aus dem Vergleich von Bild 3-12 mit Bild 3-13 deutlich wird. Eine direkte Bestimmung des plastischen Grenzzustandes, z. B. mit dem Weggrößenverfahren, ist hier nicht möglich, da die resultierenden plastischen Verbundbeanspruchungen  $S_{0,pl}$ ,  $S_{90,pl}$  und  $M_{\phi,pl}$  (vgl. Bild 3-13) miteinander interagieren. Folglich ist die Steifigkeit des Verbundes im plastischen Zustand abhängig von den Richtungen, in denen die resultierenden Verbindungsmittelkräfte wirken.

#### 3.5.1 Modellierung des Verbundes mit resultierenden Verbundbeanspruchbarkeiten

Wird eine Rippe, wie z. B. die Rippe in Bild 3-11, über den elastischen Grenzzustand des Verbundes hinaus gegenüber dem Plattenrand weiter transferiert und rotiert, so erreichen die einzelnen Verbindungsmittel, für die ein ideal-elastisch-plastisches Last-Verschiebungs-Verhalten gem. Kap. 3.2 angenommen wird, nach und nach jeweils ihre Fließgrenze  $R$ . Dabei wird die Orientierung jeder resultierenden Verbindungsmittelkraft  $R$  nach wie vor durch die Richtung der resultierenden Verbindungsmittelverschiebung bestimmt. Im Gegensatz zum elastischen Grenzzustand (Bild 3-12) sind die Verbindungsmittelkräfte nun aber nicht mehr proportional zur jeweiligen Verschiebung, da sie nicht über die Beanspruchbarkeit  $R$  der Verbindungsmittel hinaus anwachsen können (Bild 3-13). Die Komponenten  $s_{0,pl}$  und  $s_{90,pl}$  der nun konstanten resultierenden Verbundbeanspruchbarkeit  $s_{res,pl}$  werden im Folgenden hergeleitet. Dabei wird angenommen, dass der Verbund komplett plastisch ist, d. h. an jeder Stelle des Verbundes wurde die Fließverschiebung  $u_y$  erreicht oder überschritten. Damit ist der Verbund kinematisch, denn eine noch so kleine Steigerung der äußeren Belastung führt zu unendlich großen Verschiebungen.

Die resultierende längenbezogene Verbundbeanspruchung  $s_{\text{res,pl}}$  ist über die Verbundlänge  $\ell$  konstant, wie Bild 3-13 zeigt, und entspricht im plastischen Verbund dem Verhältnis der Verbindungsmittelbeanspruchbarkeit  $R$  zum Verbindungsmittelabstand  $a_v$ :

$$s_{\text{res,pl}}(x) = \frac{R}{a_v} \quad (3.21)$$

Die Komponenten  $s_0(x)$  parallel und  $s_{90}(x)$  senkrecht zum Plattenrand können als Funktionen über der Verbundlänge  $\ell$  beschrieben werden. Aus der Erkenntnis, dass das Verhältnis einer Verbundbeanspruchung  $s_{\text{pl}}(x)$  zur Verschiebung des Verbundes an der Stelle  $x$  unabhängig von der Beanspruchungsrichtung konstant ist, folgt die Beziehung

$$\frac{s_{\text{res,pl}}(x)}{u_{\text{res}}(x)} = \frac{s_{0,\text{pl}}(x)}{u(x)} = \frac{s_{90,\text{pl}}(x)}{w(x)}. \quad (3.22)$$

Darin ist  $u(x)$  die Verschiebung zwischen Rippe und Platte parallel zur Rippenachse, die entsprechend Bild 3-15 an jeder Stelle des Verbundes gleich der aufgetragenen Relativverschiebung  $u$  ist:

$$u(x) = u \quad (3.23)$$

Dagegen setzt sich die Verschiebung  $w(x)$  zwischen Rippe und Platte senkrecht zur Rippenachse an der Stelle  $x$  des Verbundes aus einem konstanten Anteil infolge einer entsprechend Bild 3-16 aufgetragenen Verschiebung  $w$  und einem veränderlichen Anteil infolge einer entsprechend Bild 3-17 aufgetragenen Verdrehung  $\varphi$  zusammen:

$$w(x) = w + \varphi x \quad (3.24)$$

Die resultierende Verbundverschiebung lautet mit Gl.(3.23) und Gl.(3.24)

$$u_{\text{res}}(x) = \sqrt{u^2(x) + w^2(x)} = \sqrt{u^2 + (w + \varphi x)^2}. \quad (3.25)$$

Einsetzen der Gleichungen (3.21), (3.23) und (3.25) in Gl.(3.22) und Auflösen nach  $s_{0,\text{pl}}(x)$  liefert die Funktion der längenbezogenen Verbundbeanspruchung parallel zur Rippenachse in Abhängigkeit von den aufgetragenen Verschiebungen  $u$  und  $v$  sowie der Verdrehung  $\varphi$ :

$$s_{0,\text{pl}}(x) = \frac{R}{a_v} \cdot \frac{u}{\sqrt{u^2 + (w + \varphi x)^2}} \quad (3.26)$$

Entsprechend erhält man durch Einsetzen der Gleichungen (3.21), (3.24) und (3.25) in Gl.(3.22) und Auflösen nach  $s_{90,pl}(x)$  die Funktion der längenbezogenen Verbundbeanspruchung senkrecht zur Rippenachse:

$$s_{90,pl}(x) = \frac{R}{a_v} \cdot \frac{w + \varphi x}{\sqrt{u^2 + (w + \varphi x)^2}} \quad (3.27)$$

Durch die Integration der längenbezogenen Verbundbeanspruchungen über die Verbundlänge erhält man die resultierenden Verbundbeanspruchungen im Schwerpunkt des Verbundes:

$$S_{0,pl} = \int_{-\frac{\ell}{2}}^{\frac{\ell}{2}} s_{0,pl}(x) dx = \frac{R}{a_v} \frac{u}{\varphi} (\log(\alpha + \ell\varphi + 2w) - \log(\beta - \ell\varphi + 2w)) \quad (3.28)$$

$$S_{90,pl} = \int_{-\frac{\ell}{2}}^{\frac{\ell}{2}} s_{90,pl}(x) dx = \frac{R}{a_v} \frac{(\alpha - \beta)}{2\varphi} \quad (3.29)$$

$$\text{mit } \alpha = \sqrt{(\ell\varphi + 2w)^2 + 4u^2} \quad \text{und} \quad \beta = \sqrt{(\ell\varphi - 2w)^2 + 4u^2}$$

Das resultierende Verbundmoment  $M_{\varphi,pl}$  lässt sich durch die resultierende Verbundbeanspruchung  $S_{90,pl}$  senkrecht zur Rippenachse ersetzen, die mit dem Hebelarm  $x_s$  um den Schwerpunkt des Verbundes dreht.

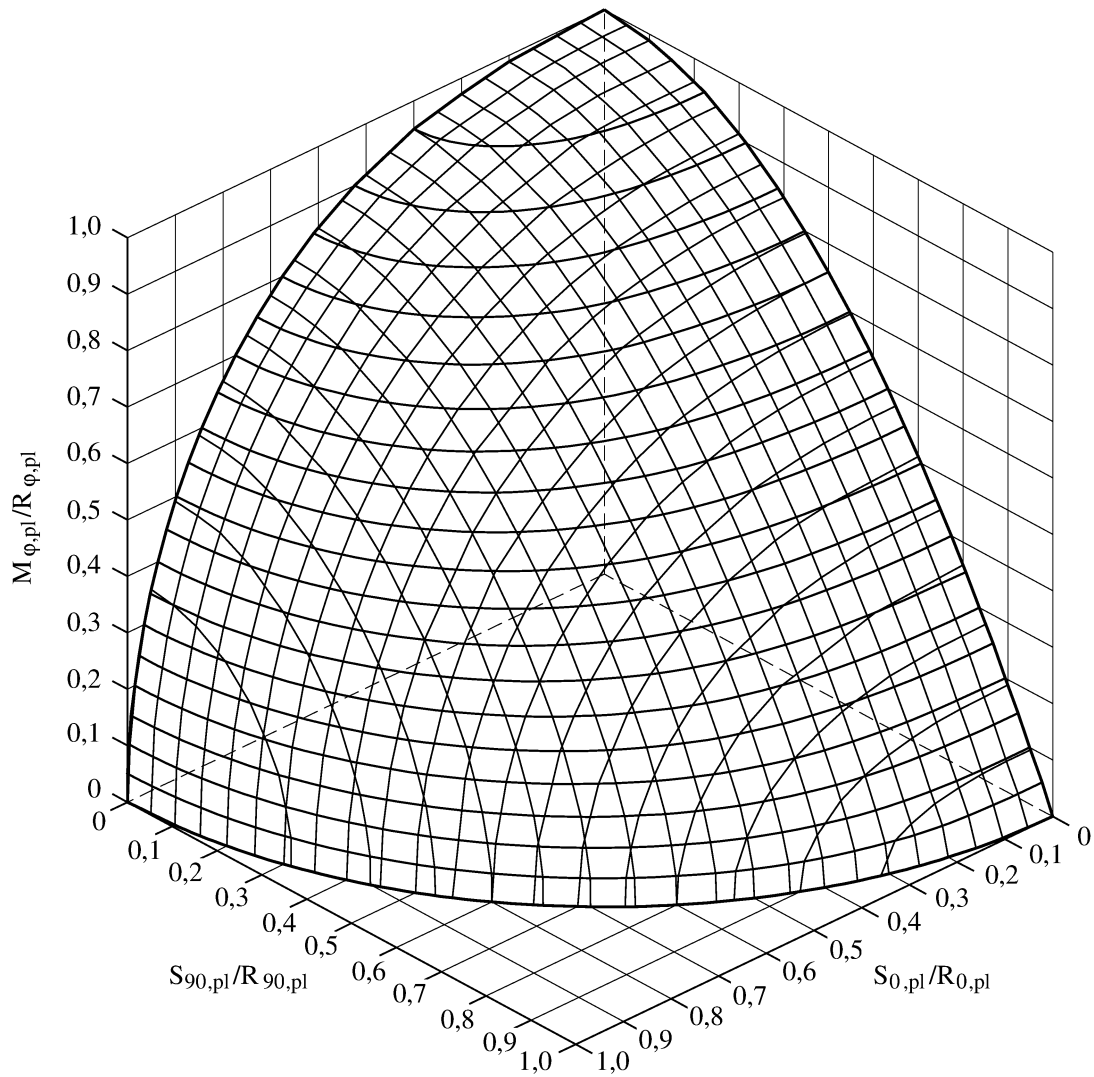
$$M_{\varphi,pl} = S_{90,pl} \cdot x_s \quad (3.30)$$

Dabei kennzeichnet  $x_s$  anschaulich den Abstand des Schwerpunktes der Fläche, die durch die Funktion  $s_{90,pl}(x)$  aufgespannt wird, vom Schwerpunkt des Verbundes, der bei  $x=\ell/2$  liegt.

$$x_s = \frac{1}{S_{90,pl}} \int_{S_{90,pl}} x \cdot s_{90,pl}(x) dx \quad (3.31)$$

Durch Einsetzen von Gl.(3.31) in Gl.(3.30) kann das resultierende Verbundmoment  $M_{\varphi,pl}$  bestimmt werden:

$$\begin{aligned} M_{\varphi,pl} &= \int_{-\frac{\ell}{2}}^{\frac{\ell}{2}} x \cdot s_{90,pl}(x) dx \\ &= \frac{R}{a_v} \frac{(\ell\varphi(\alpha + \beta) + 4u^2(\log(\beta - \ell\varphi + 2w) - \log(\alpha + \ell\varphi + 2w)) + 2w(\beta - \alpha))}{8\varphi^2} \end{aligned} \quad (3.32)$$



**Bild 3-29:**  $S_0$ - $S_{90}$ - $M_\varphi$ -Fließfläche

Wird der Verbund der Länge  $\ell$  im vollplastischen Zustand ausschließlich parallel zur Rippenachse beansprucht, so besitzt er die Beanspruchbarkeit

$$R_{0,pl} = \frac{R}{a_v} \ell. \quad (3.33)$$

Darin ist  $R$  die Beanspruchbarkeit und  $a_v$  der Abstand der einzelnen Verbindungsmittel. Entsprechend setzt er einer Beanspruchung, die ausschließlich senkrecht zur Rippenachse wirkt, die Beanspruchbarkeit

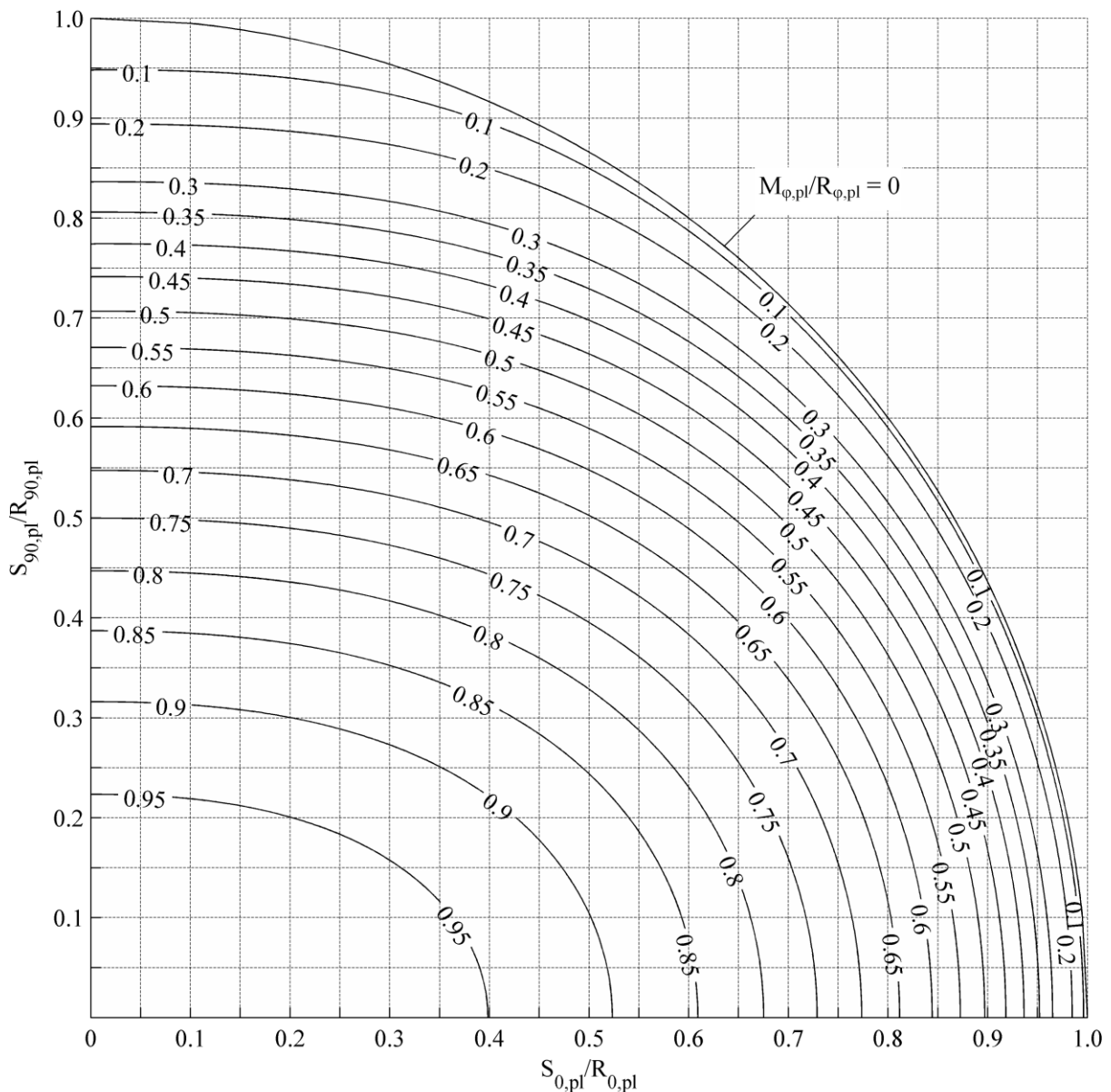
$$R_{90,pl} = \frac{R}{a_v} \ell \quad (3.34)$$

entgegen. Die Beanspruchbarkeit bei alleiniger Beanspruchung des Verbundes durch ein Moment  $M_{\varphi,pl}$  beträgt



$$R_{\varphi,pl} = \frac{R}{a_v} \frac{\ell^2}{4} \quad (3.35)$$

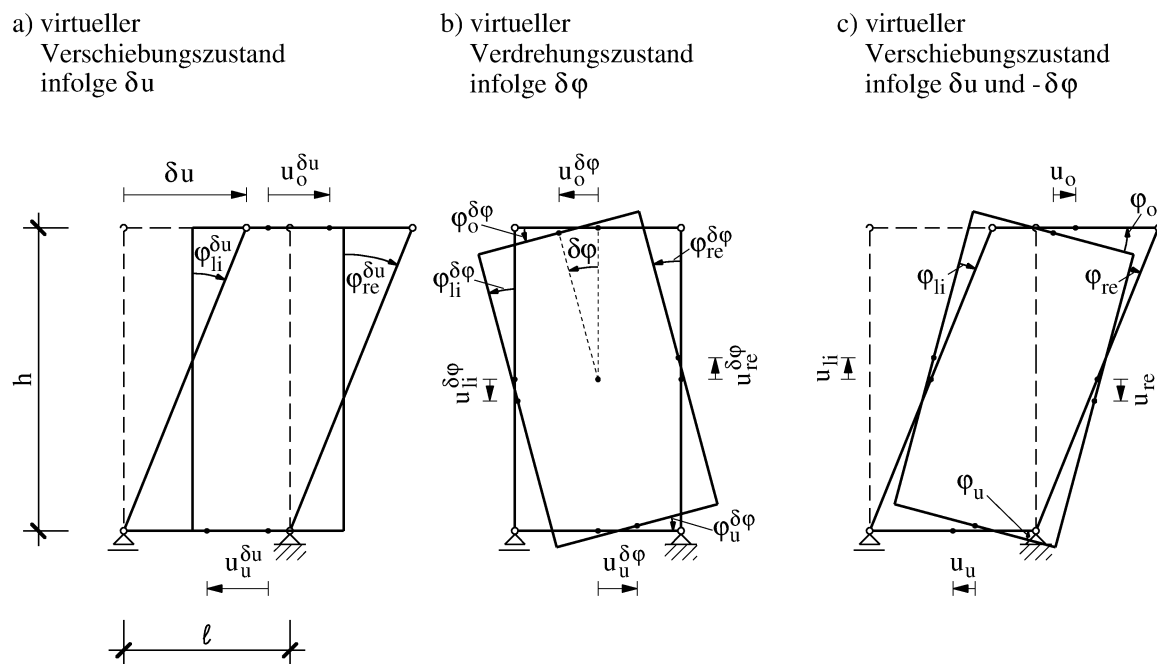
Normiert man die resultierenden Verbundbeanspruchungen  $S_{0,pl}$ ,  $S_{90,pl}$  und  $M_{\varphi,pl}$ , indem man sie auf die resultierenden Verbundbeanspruchbarkeiten  $R_{0,pl}$ ,  $R_{90,pl}$  und  $R_{\varphi,pl}$  bezieht, erhält man die in Bild 3-29 gezeigte räumlich gekrümmte Fließfläche des Verbundes. In die  $S_{0,pl}$ - $S_{90,pl}$ -Ebene projiziert, bildet sie das in Bild 3-30 dargestellte  $S_0$ - $S_{90}$ - $M_{\varphi}$ -Interaktionsnomogramm, mit dem je eine der drei resultierenden Verbundbeanspruchungen im plastischen Grenzzustand des Verbundes grafisch bestimmt werden kann, wenn die anderen beiden resultierenden Verbundbeanspruchungen bekannt sind.



**Bild 3-30:**  $S_0$ - $S_{90}$ - $M_{\varphi}$ -Interaktionsnomogramm

### 3.5.2 Beispiel 2: Tafel mit gelenkig verbundenen starren Rippen

Anhand der Tafel mit gelenkig verbundenen starren Rippen (Bild 3-23) wird im Folgenden die Anwendung der in Abschnitt 3.5.1 hergeleiteten Interaktionsgleichungen zur Berechnung des plastischen Grenzzustandes demonstriert. In Abschnitt 3.4.5 wurde bereits eine analytische Lösung für den elastischen Grenzzustand angegeben. Bild 3-25 zeigt, dass der Verbund an allen vier Plattenrändern sowohl parallel durch  $s_0$  als auch senkrecht zum Plattenrand durch  $s_{90}$  beansprucht wird. Dabei resultiert die senkrechte Beanspruchung  $s_{90}$  an jedem Plattenrand ausschließlich aus einem resultierenden Moment  $M_\phi$  und nicht aus einer resultierenden Verbundkraft  $S_{90}$ . Für den plastischen Grenzzustand der Tafel bedeutet dies, dass an allen vier Plattenrändern nur die beiden resultierenden Verbundschnittgrößen  $M_{\phi,pl}$  und  $S_{0,pl}$  miteinander interagieren. Außerdem sind die Verbundbeanspruchungen an den gegenüberliegenden Plattenrändern aus Symmetriegründen jeweils gleich groß, wie Bild 3-25 zu entnehmen ist.



**Bild 3-31:** Verschiebungszustände infolge a)  $\delta u$ , b)  $\delta \phi$  und c) einer Kombination aus  $\delta u$  und  $\delta \phi$

Dadurch lässt sich der Verschiebungszustand sowohl im elastischen als auch im plastischen Grenzzustand der Tafel mit zwei Freiheitsgraden beschreiben. Dies sind zum einen die horizontale Kopfverschiebung  $\delta u$  des gelenkigen Rahmens (Bild 3-31a), den die Rippen bilden, und zum anderen die Verdrehung  $\delta \phi$  der Platte (Bild 3-31b).

Der Verschiebungszustand bei Erreichen der plastischen Grenzlast  $F_{pl}$  lässt sich aus einer Kombination der Verschiebungszustände infolge  $\delta u$  und  $\delta \varphi$  bilden (Bild 3-31c). Für kleine Drehwinkel können die Verformungsbedingungen im plastischen Grenzzustand entsprechend Bild 3-31 wie folgt angeschrieben werden:

Infolge  $\delta u$  (Bild 3-31a):

$$u_o^{\delta u} = -u_u^{\delta u} = \frac{\delta u}{2} \quad (3.36)$$

$$\varphi_{li}^{\delta u} = \varphi_{re}^{\delta u} = \frac{\delta u}{h} \quad (3.37)$$

Infolge  $\delta \varphi$  (Bild 3-31b):

$$u_o^{\delta \varphi} = -u_u^{\delta \varphi} = \delta \varphi \frac{h}{2} \quad (3.38)$$

$$u_{li}^{\delta \varphi} = -u_{re}^{\delta \varphi} = \delta \varphi \frac{\ell}{2} \quad (3.39)$$

$$\varphi_{li}^{\delta \varphi} = \varphi_{re}^{\delta \varphi} = \varphi_o^{\delta \varphi} = \varphi_u^{\delta \varphi} = \delta \varphi \quad (3.40)$$

Infolge einer Kombination aus  $\delta u$  und  $\delta \varphi$  (Bild 3-31c):

$$u_o = u_o^{\delta u} - u_o^{\delta \varphi} = \frac{\delta u}{2} - \delta \varphi \frac{h}{2} \quad (3.41)$$

$$\varphi_o = -\varphi_o^{\delta \varphi} = -\delta \varphi \quad (3.42)$$

$$u_{re} = u_{re}^{\delta \varphi} = -\delta \varphi \frac{\ell}{2} \quad (3.43)$$

$$\varphi_{re} = \varphi_{re}^{\delta u} - \varphi_{re}^{\delta \varphi} = \frac{\delta u}{h} - \delta \varphi \quad (3.44)$$

Im plastischen Grenzzustand der Tafel sind neben den Verformungsbedingungen auch das Gleichgewicht und das Werkstoffgesetz zu erfüllen. Der kinematische Zustand, der bei Erreichen der plastischen Grenzlast  $F_{pl}$  eintritt, bedingt, dass sowohl die Verbindungen am oberen und unteren als auch am linken und rechten Plattenrand kinematisch sind. Folglich sind im plastischen Grenzzustand der Tafel mit gelenkig verbundenen starren Rippen alle Verbindungen voll plastifiziert, d. h. jedes Verbindungsmittel hat seine Fließverschiebung  $u_y$  erreicht oder

überschritten. Das Werkstoffgesetz ist dann lt. Bild 3-8 automatisch erfüllt. Folglich ist der plastische Grenzzustand gefunden, wenn das Verhältnis  $\delta u / \delta \varphi$  bekannt ist, bei dem das Gleichgewicht in allen Teilen der Tafel erfüllt ist. Die Gleichgewichtsbedingung wird mit dem Momentengleichgewicht der resultierenden plastischen Verbundschnittgrößen an der Platte, die in Bild 3-24c dargestellt sind, erfüllt:

$$\sum M = 0: M_{\varphi,pl,li} + M_{\varphi,pl,re} + M_{\varphi,pl,o} + M_{\varphi,pl,u} + S_{0,pl,o} h + S_{0,pl,re} \ell = 0 \quad (3.45)$$

Aus der analytischen Lösung des elastischen Grenzzustandes in Bild 3-25a ist bekannt, dass

$$M_{\varphi,pl,li} = M_{\varphi,pl,re} \text{ und } M_{\varphi,pl,o} = M_{\varphi,pl,u} \quad (3.46)$$

ist. Durch die Gleichungen (3.46) vereinfacht sich die Gleichgewichtsbedingung aus Gl.(3.45) zu

$$2(M_{\varphi,pl,o} + M_{\varphi,pl,re}) + S_{0,pl,o} h + S_{0,pl,re} \ell = 0 \quad (3.47)$$

Mit den Gleichungen (3.32) und (3.28) können die resultierenden Verbundbeanspruchungen angegeben werden:

$$M_{\varphi,pl,o} = \frac{R}{a_v} \frac{(2\ell\varphi_o\gamma + 4u_o^2(\log(\gamma - \ell\varphi_o) - \log(\gamma + \ell\varphi_o)))}{8\varphi_o^2} \quad (3.48)$$

$$\text{mit } \gamma = \sqrt{\ell^2\varphi_o^2 + 4u_o^2}$$

$$M_{\varphi,pl,re} = \frac{R}{a_v} \frac{(2h\varphi_{re}\gamma + 4u_{re}^2(\log(\gamma - h\varphi_{re}) - \log(\gamma + h\varphi_{re})))}{8\varphi_{re}^2} \quad (3.49)$$

$$\text{mit } \gamma = \sqrt{h^2\varphi_{re}^2 + 4u_{re}^2}$$

$$S_{0,pl,o} = \frac{R}{a_v} \frac{u_o}{\varphi_o} (\log(\sqrt{\ell^2\varphi_o^2 + 4u_o^2} + \ell\varphi_o) - \log(\sqrt{\ell^2\varphi_o^2 + 4u_o^2} - \ell\varphi_o)) \quad (3.50)$$

$$S_{0,pl,re} = \frac{R}{a_v} \frac{u_{re}}{\varphi_{re}} (\log(\sqrt{h^2\varphi_{re}^2 + 4u_{re}^2} + h\varphi_{re}) - \log(\sqrt{h^2\varphi_{re}^2 + 4u_{re}^2} - h\varphi_{re})) \quad (3.51)$$

Nun kann das Verhältnis  $\delta u / \delta \varphi$  für den plastischen Grenzzustand bestimmt werden. Dazu werden  $\delta u$  und  $\delta \varphi$  zunächst geschätzt. Durch Einsetzen der Gleichungen (3.41) bis (3.44) in die Gleichungen (3.48) bis (3.51) und Auswerten von Gl.(3.47) mit diesen Werten kann so überprüft werden, ob das Momentengleichgewicht erfüllt ist. Bei Nichterfüllung ist der Wert für  $\delta u$  bzw.  $\delta \varphi$  so lange durch

Probieren zu variieren, bis das Momentengleichgewicht erfüllt ist. Mit dem dann bekannten Verhältnis  $\delta u / \delta \varphi$  sind auch die resultierenden plastischen Verbund-schnittgrößen nach den Gleichungen (3.48) bis (3.51) bekannt. Durch Anwendung des Prinzips der virtuellen Verschiebungen an dem gelenkigen Rippen-rahmen kann die plastische Grenzlast  $F_{pl}$  nun direkt aus den resultierenden plastischen Verbund-schnittgrößen berechnet werden:

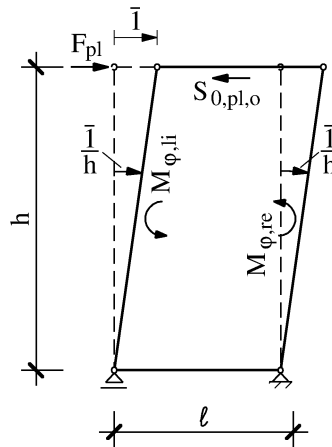
$$F_{pl} = \frac{2M_{\varphi,pl,re}}{h} + S_{0,pl,o} \quad (3.52)$$

Anhand eines Zahlenbeispiels wird der Tragfähigkeitsgewinn im plastischen Grenzzustand gegenüber dem elastischen Grenzzustand gezeigt. Die Beispieltafel besitzt folgende Parameter:

Tafelhöhe  $h = 2500\text{mm}$ ; Verbindungsmittelbeanspruchbarkeit  $R = 635\text{N}$   
 Tafellänge  $\ell = 1250\text{mm}$ ; Verbindungsmittelabstand  $a_v = 50\text{mm}$

Die Auswertung von Gleichung (3.15) liefert die elastische Grenzlast

$$F_{el} = 15,173\text{kN} \quad (3.53)$$



**Bild 3-32:** Virtueller Verschiebungszustand der Rippen zur Bestimmung der plastischen Grenzlast  $F_{pl}$  mit dem P.v.V.

Durch Probieren erhält man zwei möglich Werte für die Freiheitsgrade der Tafel im plastischen Grenzzustand:

$$\delta u = 3,239898; \delta \varphi = 0,001 \quad (3.54)$$

Einsetzen dieser Werte in die Gleichungen (3.41) bis (3.44) und Auswerten der Gleichungen (3.48) bis (3.51) liefert die resultierenden plastischen Verbund-schnittgrößen:

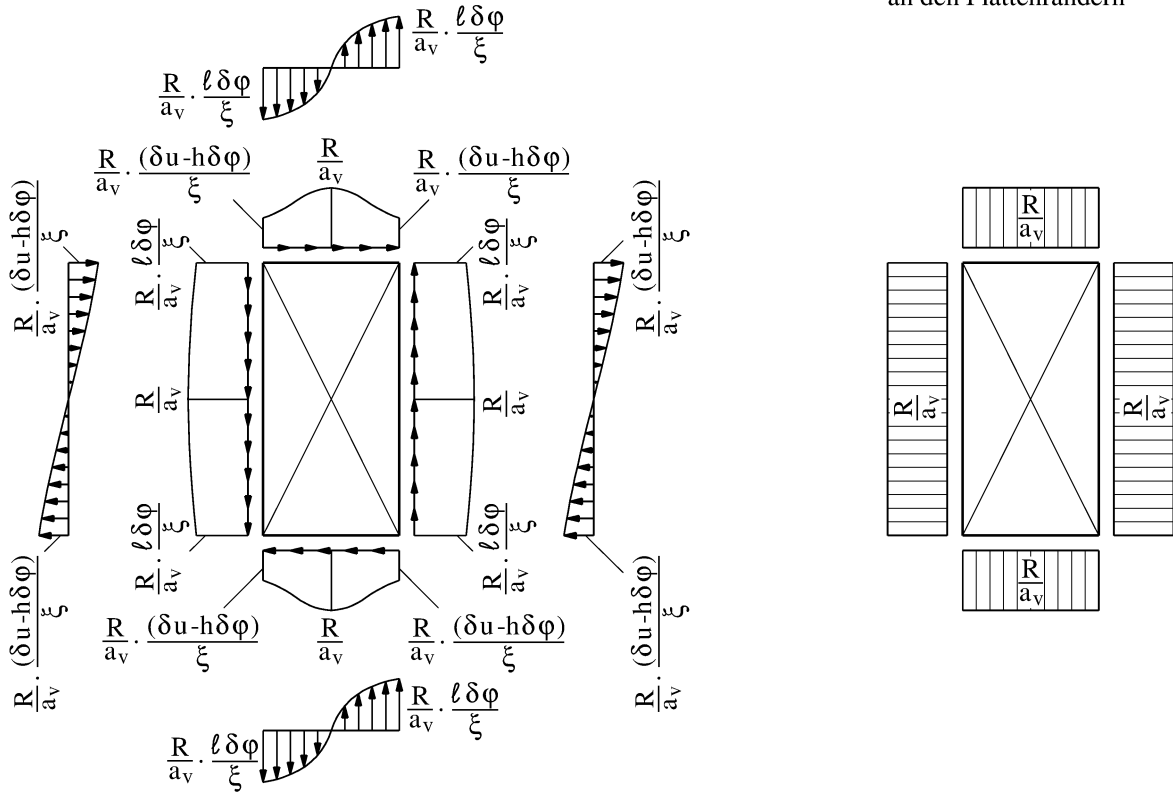
$$\begin{aligned}
 S_{0,pl,o} &= 12,173 \text{ kN}; M_{\varphi,pl,o} = -3,513 \text{ kNm}; \\
 S_{0,pl,re} &= -30,139 \text{ kN}; M_{\varphi,pl,re} = 7,134 \text{ kNm}
 \end{aligned}
 \tag{3.55}$$

Mit Gl.(3.52) wird die plastische Grenzlast  $F_{pl}$  berechnet:

$$F_{pl} = 17,880 \text{ kN} \tag{3.56}$$

a) Längenbezogene  
Verbundbeanspruchungen  
an den Plattenrändern

b) Resultierende  
längenbezogene  
Verbundbeanspruchungen  
an den Plattenrändern



$$\text{mit } \xi = \sqrt{\delta u^2 + \delta \varphi^2 (h^2 + \ell^2) - 2 \delta u \delta \varphi h}$$

**Bild 3-33:** Freigeschnittene Verbundbeanspruchungen der Tafel aus Bild 3-24 mit plastischem Verbund

Gegenüber der elastischen Grenzlast  $F_{el}$  aus Gl.(3.53) beträgt der Tragfähigkeitsgewinn durch Ausnutzung der plastischen Reserven der Tafel hier rund 18%. Durch Auswertung der Gleichungen (3.26) und (3.27) erhält man die Verläufe der längenbezogenen Verbundbeanspruchungen, die in Bild 3-33 dargestellt sind.

McCutcheon gibt in [36] eine analytische Lösung für die plastische Grenzlast scheibenartig beanspruchter Wandtafeln an, deren Rippen sich parallelo-

grammartig verschoben. Das nichtlineare Last-Verschiebungs-Verhalten der Verbindungsmittel wird dabei mit einer Potenzfunktion beschrieben, deren Parameter aus konkreten Versuchsergebnissen abgeleitet werden müssen. Allerdings kann diese Lösung nur mit der vereinfachenden Annahme gefunden werden, dass die Verschiebungsrichtung der Ecknägel den Diagonalenrichtungen der Beplankung entspricht.

### 3.5.3 Beispiel 3: Tafel mit starren Rippen ohne Zugverankerung

Am Beispiel der Tafel mit starren Rippen ohne Zugverankerung wird im Folgenden die Anwendung des in Bild 3-30 dargestellten Interaktionsnomogramms zur Bestimmung der plastischen Grenzlast  $F_{pl}$  demonstriert. Der elastische Grenzzustand der Tafel wurde in Abschnitt 3.4.6 bereits bestimmt. Bild 3-28 ist zu entnehmen, dass nur der untere Plattenrand aus dem Verbund Beanspruchungen sowohl parallel als auch senkrecht erfährt. Alle anderen Ränder sind ausschließlich parallel zum Plattenrand beansprucht. Demzufolge findet im plastischen Grenzzustand nur am unteren Plattenrand eine Interaktion der resultierenden Verbundschnittgrößen  $S_0$ ,  $S_{90}$  und  $M_\varphi$  statt. Aus dem Kräfte- und Momentengleichgewicht an der Platte können die Verbundschnittgrößen  $S_{0,pl,u}$ ,  $S_{90,pl,u}$  und  $M_{\varphi,pl,u}$  im plastischen Zustand in Abhängigkeit von der noch unbekannten plastischen Grenzlast  $F_{pl}$  und der unbekannten resultierenden Verbundkraft  $S_{0,re}$  ausgedrückt werden (Bild 3-34):

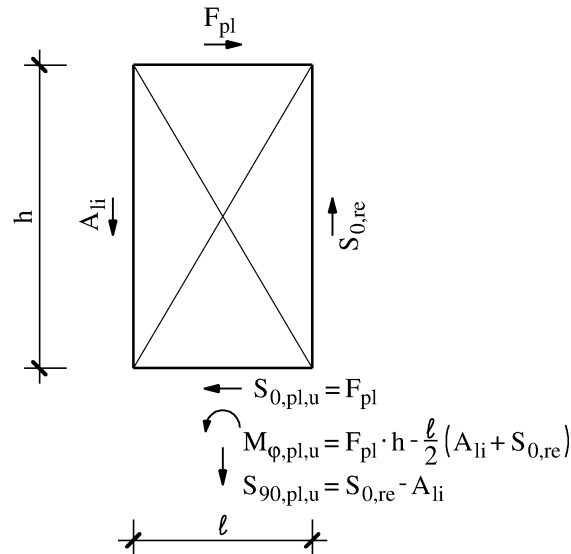
$$S_{0,pl,u} = F_{pl} \quad (3.57)$$

$$S_{90,pl,u} = S_{0,re} - A_{li} \quad (3.58)$$

$$M_{\varphi,pl,u} = F_{pl} h - \frac{\ell}{2} (A_{li} + S_{0,re}) \quad (3.59)$$

Der Verbund am unteren Plattenrand erreicht im elastischen Grenzzustand (Bild 3-28c) seine Fließgrenze während die übrigen Verbunde elastisch bleiben. Für den plastischen Grenzzustand wird daher unterstellt, dass der Verbund am unteren Plattenrand vollständig plastifiziert ist während alle übrigen Verbunde nach wie vor elastisch sind. Somit stellt der untere Verbund eine Art Fließgelenk dar, in welchem die resultierenden plastischen Verbundschnittgrößen miteinander interagieren. Die kinematische Kette des Gesamtsystems ist mit dem Vorhandensein dieses einen Fließgelenks zunächst jedoch noch nicht erreicht, da eine weitere Steigerung der äußeren Last  $F$  eine Steigerung der resultierenden Ver-

bundkraft  $S_{0, \text{re}}$  bewirkt. Im vorliegenden Fall kann die äußere Last  $F$  soweit gesteigert werden, bis entweder der rechte Verbund plastifiziert und somit die kinematische Kette des Gesamtsystems erreicht wird oder das Verhältnis  $M_{\varphi, \text{pl}, \text{u}}/R_{\varphi, \text{pl}, \text{u}}$  im unteren Verbund gegen Null strebt.



**Bild 3-34:** Gleichgewicht an der freigeschnittenen Platte der Tafel aus Bild 3-26 im plastischen Grenzzustand

Ob der rechte Verbund im plastischen Grenzzustand des Systems seine Fließgrenze erreicht und damit ein zweites Fließgelenk im System bildet, hängt von den Abmessungen, den Steifigkeiten und den Auflasten des Systems ab. Wenn er seine Fließgrenze nicht erreicht, wird das Verhältnis  $S_{90, \text{pl}, \text{u}}/R_{90, \text{pl}, \text{u}}$  im unteren Verbund mit steigender äußerer Last  $F$  größer, da  $M_{\varphi, \text{pl}, \text{u}}/R_{\varphi, \text{pl}, \text{u}}$  im unteren Verbund gegen Null strebt. Dies geht mit sehr großen Verschiebungen einher, da dann der Verschiebungsanteil senkrecht zum unteren Plattenrand innerhalb der Interaktion extremal wird und somit die Verdrehung der Platte und die Horizontalverschiebung der Kopfrippe große Werte annehmen. Bei großen Verschiebungen ist jedoch die Voraussetzung des Gleichgewichts am unverformten System nicht mehr erfüllt. Vor diesem Hintergrund erscheint die Berechnung einer unteren Grenze von  $F_{\text{pl}}$  bei Verformungen, die im Verhältnis zu den Abmessungen des statischen Modells klein sind, sinnvoller als die Bestimmung von  $F_{\text{pl}}$  unter Nichteinhaltung der zuvor angenommenen Randbedingungen.

Da sowohl die plastische Grenzlast  $F_{\text{pl}}$  als auch die resultierende Verbundkraft  $S_{0, \text{re}}$  als auch die drei resultierenden Verbundschnittgrößen am unteren Plattenrand unbekannt sind, können diese Größen allein mit den Gleichungen (3.57) bis (3.59) nicht bestimmt werden. Durch die Anwendung des Interaktionsnomo-



gramms aus Bild 3-30 können jedoch absolute Werte für die resultierenden Verbundschnittgrößen  $S_{0,pl,u}$ ,  $S_{90,pl,u}$  und  $M_{\varphi,pl,u}$  des vollplastischen Verbundes am unteren Plattenrand vorgegeben werden. Dadurch reduziert sich das Problem auf die beiden Unbekannten  $F_{pl}$  und  $S_{0,re}$ . Für diese beiden Unbekannten können nun Zahlenwerte gewählt werden. Ob diese gewählten Werte einen Zustand des Systems beschreiben, in welchem Gleichgewicht erfüllt ist, kann mit dem Interaktionsnomogramm überprüft werden.

Aus den Ergebnissen des elastischen Grenzzustandes ist ersichtlich, dass die Auflagerkraft der rechten Randrippe und damit auch  $S_{0,re}$  bis zum Erreichen der plastischen Grenzlast  $F_{pl}$  weiter ansteigen muss. Ausgehend von der bekannten Schnittgröße  $S_{0,re}$  des elastischen Grenzzustandes kann  $S_{0,re}$  nun Schrittweise gesteigert werden. Innerhalb jedes dieser Schritte kann dann eine äußere Last  $F$  gewählt werden, die mit den Gleichgewichtsbeziehungen aus Bild 3-34 resultierende Verbundschnittgrößen  $S_{0,pl,u}$  und  $M_{\varphi,pl,u}$  liefert. Nun ist zu überprüfen, ob die Verhältniswerte  $S_{0,pl,u}/R_{0,pl,u}$ ,  $S_{90,pl}/R_{90,pl}$  und  $M_{\varphi,pl,u}/R_{\varphi,pl,u}$  einen Punkt auf der Fließfläche in Bild 3-29 beschreiben. Dazu kommt das Interaktionsnomogramm zur Anwendung. Liegt der Punkt nicht auf der Fließfläche, so muss die gewählte Kraft  $F$  solange variiert werden, bis der Punkt auf der Fließfläche liegt.

Das Vorgehen wird im Folgenden mit konkreten Zahlenwerten erläutert. Um die folgenden Ergebnisse mit den Ergebnissen der Beispiele 1 und 2 vergleichbar zu machen, werden keine Auflasten auf das System aufgebracht, da die Auflast  $A_{li}$  die Grenztragfähigkeit des Systems beeinflusst.

Mit Gl.(3.58), Gl.(3.34) und  $A_{li} = 0$  erhält man die erste Eingangsgröße  $S_{90,pl}/R_{90,pl}$  für das Interaktionsnomogramm in Bild 3-30:

$$\frac{S_{90,pl,u}}{R_{90,pl,u}} = \left| \frac{S_{0,re} a_v}{R \ell} \right| \stackrel{!}{\leq} 1 \quad (3.60)$$

Mit der Verbindungsmittelbeanspruchbarkeit  $R = 635\text{N}$ , der Tafellänge  $\ell = 1250\text{mm}$ , dem Verbindungsmittelabstand  $a_v = 50\text{mm}$  und der gewählten resultierenden Verbundbeanspruchung  $S_{0,re} = 12,00\text{kN}$  beträgt das Verhältnis  $S_{90,pl}/R_{90,pl} = 0,76$ .

Die zweite Eingangsgröße für das Interaktionsnomogramm ist das Verhältnis  $S_{0,pl,u}/R_{0,pl,u}$ , das aus den Gleichungen (3.57) und (3.33) resultiert:

$$\frac{S_{0,pl,u}}{R_{0,pl,u}} = \left| \frac{F_{pl} a_v}{R \ell} \right| \stackrel{!}{\leq} 1 \quad (3.61)$$

Nun wird ein Wert für  $F_{pl}$  gewählt, um Gl.(3.61) auswerten zu können. Mit  $F_{pl} = 3,81\text{kN}$  erhält man z. B.  $S_{0,pl,u}/R_{0,pl,u} = 0,24$ . Aus den Gleichungen (3.59) und (3.35) folgt der dritte Verhältniswert, der aus dem Interaktionsnomogramm abgelesen werden kann:

$$\frac{M_{\varphi,pl,u}}{R_{\varphi,pl,u}} = \left| \frac{2a_v (2F_{pl}h - \ell(A_{li} + S_{0,re}))}{R \ell^2} \right| \stackrel{!}{\leq} 1 \quad (3.62)$$

Mit  $h = 2500\text{mm}$  beträgt  $M_{\varphi,pl,u}/R_{\varphi,pl,u} = 0,41$ .

Schließlich ist mit dem Interaktionsnomogramm zu überprüfen, ob die drei Verhältniswerte einen Punkt auf der Fließfläche in Bild 3-29 beschreiben. Dies ist der Fall, wenn die errechneten Verhältniswerte mit den aus dem Diagramm abgelesenen Verhältniswerten übereinstimmen. Mit den oben gewählten Zahlenwerten trifft dies zu, da der Wert der äußeren Last  $F$  richtig gewählt wurde. Somit wurde ein möglicher Gleichgewichtszustand gefunden.

In Tabelle 3-1 wurde das oben beschriebene Vorgehen auf unterschiedliche  $S_{0,re}$ -Werte angewandt. Die oben genannten Zahlenwerte sind in Zeile 1 dieser Tabelle zu finden.

	<b><math>S_{0,re}</math> [kN]</b>	<b><math>S_{90,pl,u}/R_{90,pl,u}</math> [-]</b>	<b><math>F_{pl}</math> [kN]</b>	<b><math>S_{0,pl,u}/R_{0,pl,u}</math> [-]</b>	<b><math>M_{\varphi,pl,u}/R_{\varphi,pl,u}</math> [-]</b>
1	12,00	0,76	<b>3,81</b>	0,24	0,41
2	13,00	0,82	<b>3,86</b>	0,24	0,31
3	14,00	0,88	<b>3,89</b>	0,25	0,20
4	15,00	0,94	<b>3,92</b>	0,25	0,09
5	15,30	0,96	<b>3,88</b>	0,24	0,03
6	15,40	0,97	<b>3,87</b>	0,24	0,01

**Tabelle 3-1:** Iterative Bestimmung von  $F_{pl}$  mit dem  $S_0$ - $S_{90}$ - $M_{\varphi}$ -Interaktionsnomogramm aus Bild 3-30

Die Auswertung in Tabelle 3-1 zeigt, dass der Wert der plastischen Grenzlast  $F_{pl}$  mit steigendem  $S_{0,re}$ -Wert gegen ein Maximum von  $3,92\text{kN}$  strebt. Oberhalb des Wertes  $S_{0,re} = 15,00\text{kN}$  fällt die plastische Grenzlast  $F_{pl}$  wieder ab. Folglich ist  $F_{pl} = 3,92\text{kN}$  die gesuchte plastische Grenzlast dieses Beispiels.

## 3.6 Fließverbundmethode und Schubfeldmethode

### 3.6.1 Untere Grenze des plastischen Grenzzustandes mittels Schubfeldmethode

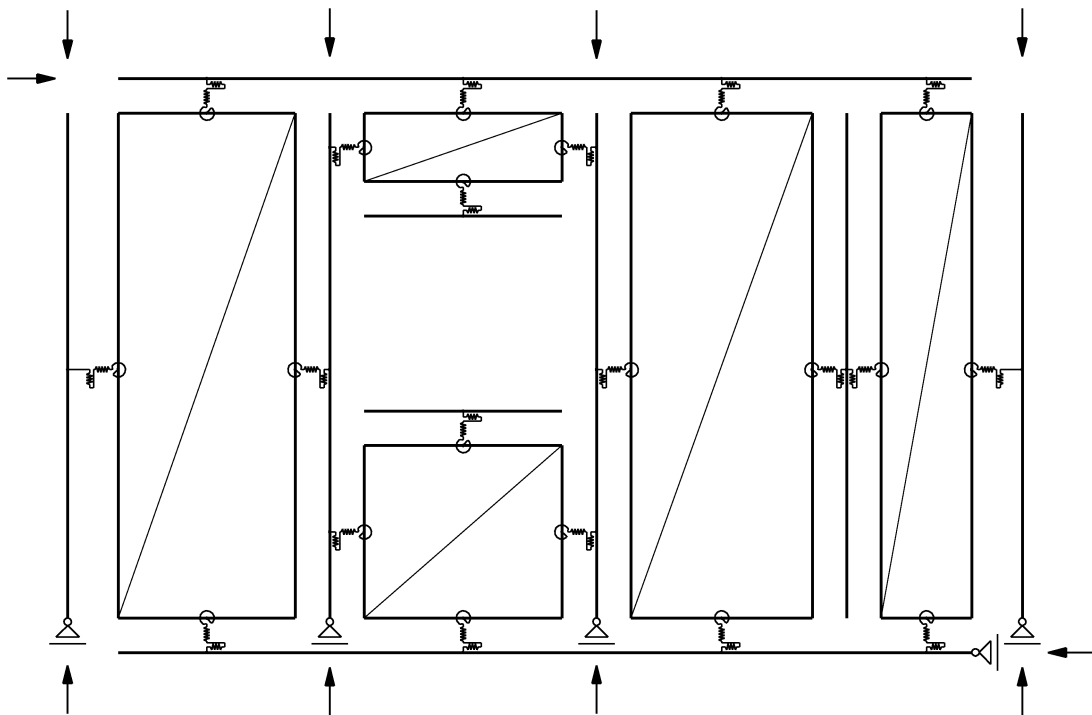
Eine Modellierung von Holztafeltragwerken, die die Bestimmung des plastischen Grenzzustandes durch einfache Handrechnungen zulässt, ist unter Berücksichtigung aller in Abschnitt 2.3.1 genannten Besonderheiten nicht möglich. Durch einige Vereinfachungen lassen sich jedoch statische Modelle für Holztafeltragwerke finden, die das wesentliche Tragverhalten zutreffend abbilden und deren plastische Grenzzustände durch die Anwendung des Eindeutigkeitssatzes (vgl. Kap. 2.2.2) bestimmt werden können. Im Folgenden wird allgemein und am Beispiel der Wandtafel aus Bild 1-1 gezeigt, dass die plastischen Grenzzustände dieser stark vereinfachten statischen Modelle den Ergebnissen der Schubfeldmethode entsprechen. Anschließend wird gezeigt, dass die mit der Schubfeldmethode bestimmten plastischen Grenzzustände immer untere Grenzen des tatsächlichen plastischen Grenzzustandes darstellen.

Mit den in Abschnitt 3.1 beschriebenen vereinfachenden Annahmen und unter Berücksichtigung des Abschnitts 3.4.2 erhält man für die Wandtafel aus Bild 1-1 zunächst das in Bild 3-35 dargestellte statisch unbestimmte Modell. Der Grad  $n$  der statischen Unbestimmtheit folgt aus der Summe der Wertigkeiten der Lager dieses Modells, die  $j=5$  beträgt, der Summe  $s=60$  aller Wertigkeiten der Zwischenbindungen, dies sind die Weg- und Drehfedern, und der Anzahl  $k=14$  der freizuschneidenden starren Körper, dies sind die Rippen und die Platten:

$$n = j + s - 3 \cdot k = 5 + 60 - 3 \cdot 14 = 23$$

Der elastische Grenzzustand eines solchen vielfach statisch unbestimmten Modells ist erreicht, wenn die resultierenden Federkräfte und -momente in einem der Verbunde Werte annehmen, die mit dem Erreichen der Fließverschiebung des Verbundes einhergehen. In Abschnitt 3.4 wurde gezeigt, wie der elastische Grenzzustand mit dem Weggrößenverfahren unter der Annahme biegestarrer Rippen berechnet wird. Die Beanspruchbarkeit der Tafelkonstruktion ist jedoch im elastischen Grenzzustand noch nicht erreicht. Erst wenn die plastischen Reserven des duktilen Verbundes soweit ausgeschöpft sind, dass das statische Modell kinematisch wird, sind der plastische Grenzzustand und damit auch die Beanspruchbarkeit der Tafelkonstruktion erreicht. Im plastischen Grenzzustand

können die Verbunde zwischen Rippen und Beplankung elastisch, teilplastisch oder vollplastisch sein. Zur Bestimmung der resultierenden Verbundbeanspruchungen im teil- und vollplastischen Zustand ist eine Interaktionsbedingung zwischen der resultierenden Verbundbeanspruchung parallel zum Plattenrand, der resultierenden Verbundbeanspruchung senkrecht zum Plattenrand und dem resultierenden Moment einzuhalten. Diese Interaktionsbedingung ist in Abschnitt 3.5 unter der Voraussetzung biegestarrer Rippen angegeben. Jedoch ist die Berechnung des plastischen Grenzzustandes mit Hilfe der Interaktionsbedingung nur iterativ mit verhältnismäßig großem Rechenaufwand möglich und daher für einfache Handrechnungen ungeeignet. Folglich muss diese aufwendige Interaktion mit einer weiteren vereinfachenden Annahme umgangen werden, um die Wandtafel einer einfachen Handrechnung zugänglich zu machen.



**Bild 3-35:** Einfaches statisches Modell für die Wandtafel aus Bild 1-1 mit starren Rippen und starrer Beplankung

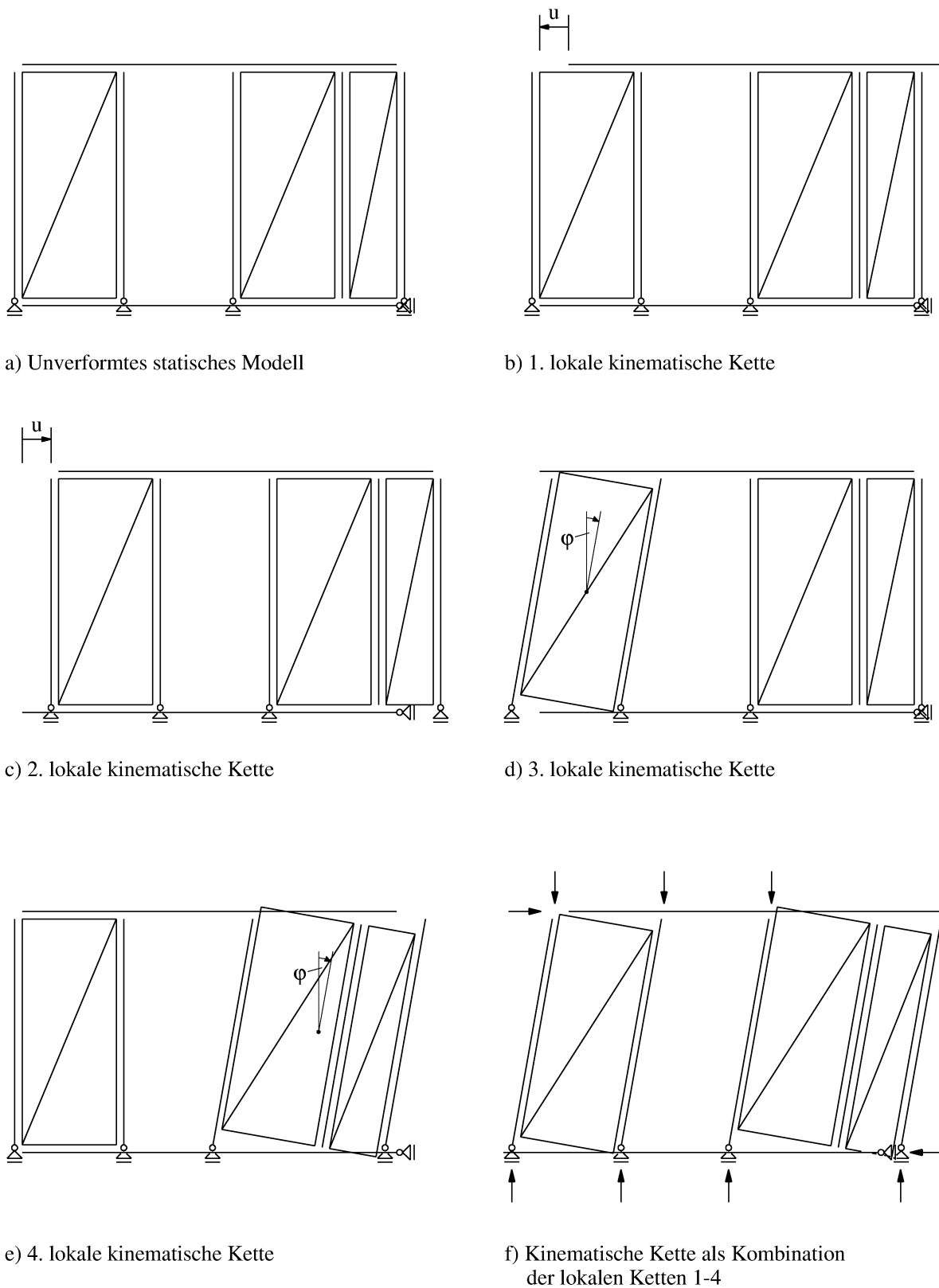
Diese weitere Vereinfachung besteht darin, die Längssteifigkeit der Beplankung gleich Null zu setzen, so dass die Platten der Beplankung nur Schubbeanspruchungen aufnehmen können. Dadurch werden zwischen Rippe und Plattenrand nur Kräfte übertragen, die parallel zum Plattenrand wirken. Folglich treten in den Rippen weder Biegemomente noch Querkräfte auf. Im statischen Modell können dann ausschließlich Beanspruchungen in Richtung der Rippenachsen

übertragen werden und nicht senkrecht dazu, so dass eine Interaktion entfällt. Dadurch bedingt können nur solche Teile des statischen Modells bei der Lastabtragung wirksam sein, für die ein Gleichgewichtszustand ausschließlich mit Beanspruchungen in Richtung der Rippenachsen möglich ist.

Für das in Bild 3-35 dargestellte statische Modell der Wandtafel bedeutet diese weitere Vereinfachung, dass sich die Bereiche unter- und oberhalb der Fensteröffnung nicht an der Lastabtragung beteiligen. Denn ohne eine Lastweiterleitung senkrecht zu den Rippenachsen und ohne Kontakt der Rippen untereinander ist in den frei geschnittenen Platten unter und über der Fensteröffnung kein Gleichgewicht möglich.

Zur Berechnung des plastischen Grenzzustandes muss nun für das mit den genannten Annahmen stark vereinfachte statische Modell einer Holztafelkonstruktion der einzig mögliche Zustand gefunden werden, der alle vier in Gl. (2.1) genannten Bedingungen im übertragenen Sinne erfüllt. Man erhält diesen Zustand durch die Kombination von lokalen kinematischen Ketten unter Berücksichtigung des Gleichgewichts in allen Teilen des statischen Modells. Lokale kinematische Ketten sind wegen der getroffenen Vereinfachungen nur durch Verschiebungen der Rippen gegenüber den Plattenrändern möglich, die sich parallel zu den Plattenrändern einstellen. Bild 3-36 zeigt das stark vereinfachte statische Modell der Wandtafel aus Bild 1-1 und vier mögliche lokale kinematische Ketten. Aus Gründen der Übersichtlichkeit sind die Verbindungen zwischen den Rippen und der Beplankung nicht dargestellt.

Die erste lokale kinematische Kette in Bild 3-36b entsteht durch eine Horizontalverschiebung der Kopfrippe gegenüber dem Restsystem der Wandtafel. Infolge dieser Verschiebung fließen alle drei Verbunde zwischen Kopfrippe und Platten. In diesem Zustand ist zwar eine kinematische Kette erreicht, d. h. die dritte Bedingung (B3) in Gl. (2.1) ist erfüllt, und durch das Fließen der Verbunde ist auch die zweite Bedingung (B2) eingehalten, jedoch ist an den Platten ohne weitere Verschiebungen im System kein Gleichgewicht möglich. Selbiges gilt auch für den Zustand der zweiten lokalen kinematischen Kette, die durch eine Horizontalverschiebung der gesamten Konstruktion gegenüber der Fußrippe entsteht (Bild 3-36c).

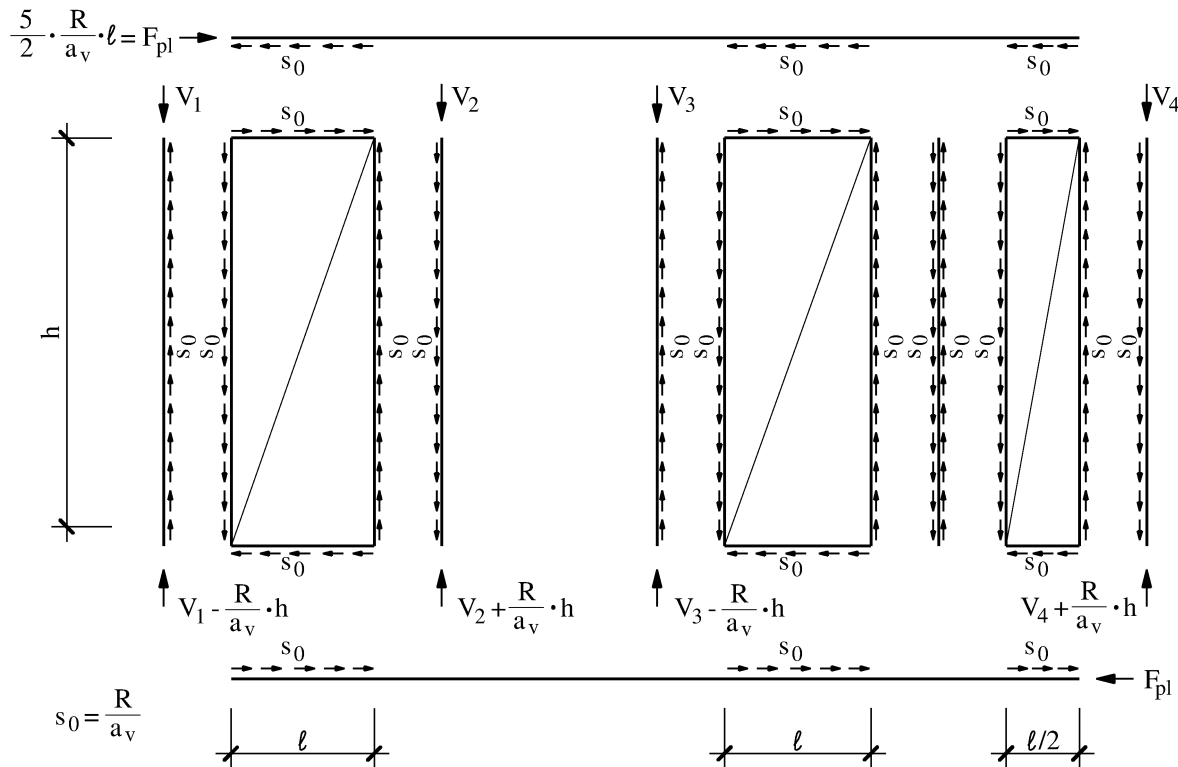


**Bild 3-36:** Lokale kinematische Ketten (b-e) und kombinierte kinematische Kette im plastischen Grenzzustand (f) des statischen Modells der Wandtafel aus Bild 1-1 ohne Längssteifigkeit der Platten

Folglich können beide Zustände für sich allein nicht dem plastischen Grenzzustand des Systems entsprechen. In den lokalen kinematischen Ketten in Bild 3-36d und e verdrehen sich die Platten gegenüber den Rippen. Dadurch verschieben sich die Rippen gegenüber den Platten parallel zu den Plattenrändern. Dies führt zu einem Gleichgewichtszustand in den frei geschnittenen Platten, der nur infolge einer äußeren Einwirkung auf die Platte möglich ist. Da Lasten, die direkt an den Platten angreifen, a priori ausgeschlossen sind, können diese beiden lokalen kinematischen Ketten ebenfalls allein nicht zum plastischen Grenzzustand führen. Erst die Kombination der vier lokalen kinematischen Ketten (Bild 3-36f) führt auf den plastischen Grenzzustand, der alle vier Bedingungen nach Gl. (2.1) erfüllt:

- Die erste Bedingung (B1) ist erfüllt, da das Gleichgewicht in allen Teilen des Tragwerks erfüllt ist, wie Bild 3-37 zeigt.
- Die zweite Bedingung (B2) ist dadurch erfüllt, dass die resultierende Verbundbeanspruchung  $s_0$  in allen Verbunden gleich der plastischen Verbundbeanspruchbarkeit  $R/a_v$  ist.
- Ein kinematischer Mechanismus ist erreicht, d. h. die dritte Bedingung (B3) ist eingehalten.
- Auch die vierte Bedingung (B4) ist eingehalten, da die Wirkungsrichtung der resultierenden plastischen Verbundkraft, die der Beanspruchbarkeit des duktilen Verbundes entspricht, und die Richtung der Verschiebung, auf der sie Arbeit verrichtet, in jedem Verbund gleich sind. Somit wird nur positive Dissipationsarbeit geleistet.

Für das stark vereinfachte statische Modell in Bild 3-36a ist damit der in Bild 3-37 dargestellte einzig mögliche plastische Grenzzustand gefunden. Dieser entspricht dem Gleichgewichtszustand, den man durch die Anwendung der Schubfeldmethode [31] erhält. Dieser Gleichgewichtszustand kann sich jedoch nur dann einstellen, wenn alle vier lokalen kinematischen Ketten gleichzeitig vorhanden sind. Das statische Modell besitzt damit bei Erreichen des plastischen Grenzzustandes nicht nur einen einzigen Verschiebungsfreiheitsgrad, sondern alle starren Körper des Modells sind mit Ausnahme der einwertigen Auflagerfreiheitsgrade frei verschieblich. Dadurch unterscheidet sich der kinematische Bruchmechanismus der Schubfeldmodelle für Holztafeln wesentlich von den Stabmodellen im Stahlbau, die der Fließgelenktheorie zugrunde gelegt werden.



**Bild 3-37:** Gleichgewichtszustand an den freigeschnittenen starren Körpern des statischen Modells aus Bild 3-36f, der auch den Ergebnissen der Schubfeldmethode entspricht

Übernimmt man den Gleichgewichtszustand aus Bild 3-37 für das statische Modell in Bild 3-35 als einen gewählten Zustand, der das Gleichgewicht mit den äußeren Lasten sicherstellt, der aber die Verformungsbedingungen nicht erfüllt, so zeigt der statische Satz (vgl. Kap. 2.2.2), dass der gewählte Zustand eine untere Grenze des plastischen Grenzzustandes des Modells darstellt. Denn die Bedingungen (B1), (B2) und (B4) sind – genauso wie für das stark vereinfachte statische Modell aus Bild 3-36 – erfüllt. Die dritte Bedingung (B3) ist formal auch erfüllt, da ein kinematischer Bruchmechanismus erreicht ist. Damit wäre der Eindeutigkeitssatz gültig und der mit der Schubfeldmethode gefundene Zustand wäre nicht nur der plastische Grenzzustand des Modells in Bild 3-36a sondern auch der des Modells in Bild 3-35. Dass dies nicht zutrifft, wird aus der Anschauung der beiden Modelle deutlich. Denn das Modell in Bild 3-35 besitzt gegenüber dem stark vereinfachten Modell in Bild 3-36a noch Tragreserven in der Biegesteifigkeit der Rippen sowie in den Verbunden der Sturz- und Brüstungsplatten. Folglich ist das Erreichen des kinematischen Bruchmechanismus' hier ausschließlich auf die Wahl des Gleichgewichtszustandes zurückzuführen,



der gänzlich ohne Beanspruchungen senkrecht zu den Plattenrändern gebildet wurde, und nicht auf eine Verschieblichkeit des statischen Modells. Die dritte Bedingung (B3) ist damit im übertragenen Sinne nicht erfüllt, da sich der kinematische Mechanismus hier nur zufällig einstellt. Es gilt der statische Satz, d. h. der gewählte Gleichgewichtszustand nach Schubfeldmethode führt für das statische Modell in Bild 3-35 zu einer unteren Grenze des plastischen Grenzzustandes.

### 3.6.2 Vor- und Nachteile der Schubfeldmethode

Die einfachen statischen Modelle, die der Schubfeldmethode zugrunde liegen, und die indirekte Nutzung plastischer Tragreserven bringen folgenden Vorteil mit sich:

Vorteil:

- Durch Anschreiben eines einfachen Gleichgewichtszustandes kann eine untere Grenze des plastischen Grenzzustandes einer Holztafelkonstruktion bestimmt werden. Somit eignet sich die Schubfeldmethode besonders für Handrechnungen.

Durch die Anwendung der Schubfeldmethode sind das tatsächliche Verformungsverhalten der Holztafelstruktur und damit die tatsächlich auftretenden Beanspruchungen ihrer Bauteile unbekannt. Hinsichtlich der Bemessung der Bauteile bringt dies einige Nachteile mit sich.

Nachteile:

- Es ist keine Aussage darüber möglich, ob Rippen oder Platten infolge von Beanspruchungen versagen, die im tatsächlichen Tragwerk vorhanden sind, die aber im vereinfachten statischen Modell der Schubfeldmethode nicht vorkommen, wie z. B. Beanspruchungen senkrecht zu den Rippenachsen bzw. zum Plattenrand. Die Versagensursachen könnten dabei Sprödbrüche in Rippen oder Platten, das Ausknicken der schlanken Rippen oder das Beulen der Platten sein.
- Die Verformungen von Holztafeln können nur im Rahmen der starken Vereinfachungen abgeschätzt werden, die dem Schubfeldmodell zugrunde liegen.

Die Schubfeldmethode ist nur auf Tragwerksteile anwendbar, die die Grundvoraussetzungen für statisch wirksame Schubfelder erfüllen. Diese Voraussetzun-

gen sind rechteckige Platten, die an allen vier Rändern über einen kontinuierlichen Verbund mit Rippen verbunden sind. Die Rippen sind in ihrer Längsrichtung gelagert, so dass an allen vier Plattenrändern Kräfte parallel zum Plattenrand übertragen werden können. Daraus folgt ein weiterer Nachteil der Schubfeldmethode:

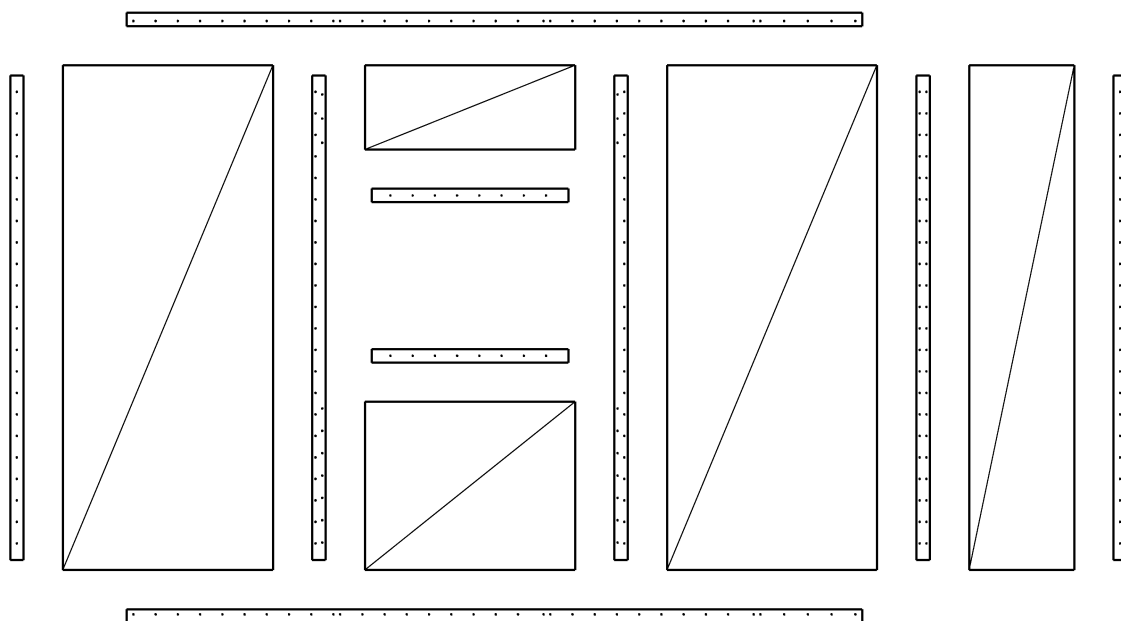
- Tafeltragwerke, die keine Schubfelder aufweisen, sondern die aus Bereichen mit freien Plattenrändern oder aus Tafeln mit nicht orthogonalen Rändern bestehen, über die Kräfte ein- oder ausgeleitet werden, können nicht mit der Schubfeldmethode bemessen werden, da das Gleichgewicht solcher Tragwerke im plastischen Grenzzustand nur unter Berücksichtigung der Beanspruchungen senkrecht zum Plattenrand gebildet werden kann.

## 4 Stab-Verbund-Modell für Holztafeln

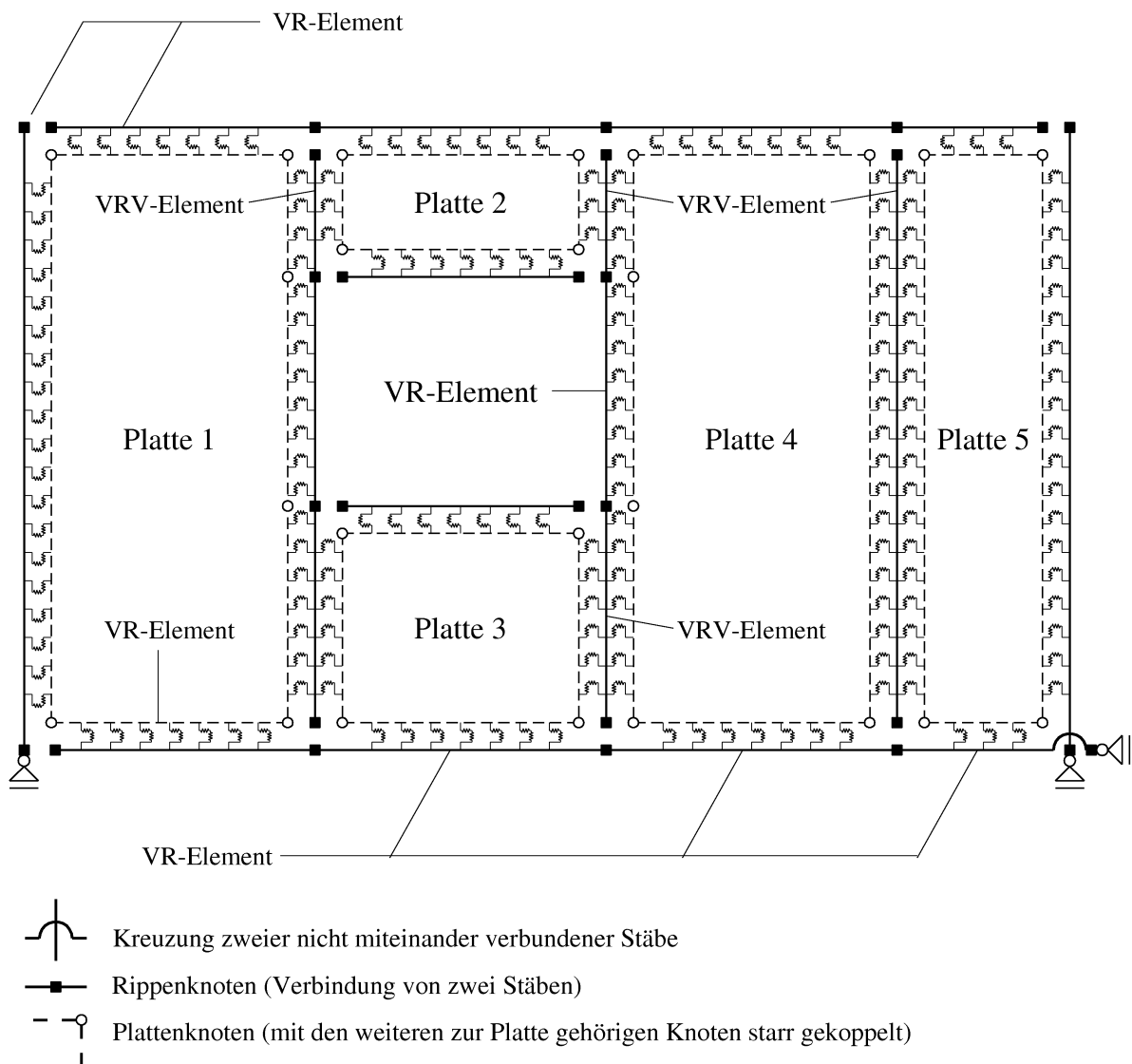
### 4.1 Allgemeines

Holztafeln bestehen aus einer Vielzahl von Bauteilen und Verbindungsmitteln. In Kapitel 1 wurde dargelegt, dass eine detaillierte Berechnung der Beanspruchungen und Verformungen solcher Konstruktionen bisher nur mit aufwendigen Finite-Elemente-Analysen möglich ist, die u. a. aufgrund der vielen einzelnen Verbindungsmittel einen hohen Modellierungs- und Rechenaufwand erfordern.

In diesem Kapitel wird ein Stab-Verbund-Modell für Holztafeln vorgestellt, das mit wenigen Stabelementen vergleichbare Ergebnisse liefert. Die Modellierung der Tafeln als Stabwerke ist dadurch möglich, dass die flächigen Bauteile der Beplankung vereinfachend als starr angenommen und so über starr gekoppelte Eckknoten berücksichtigt werden. Dadurch sind nur die Rippen als Stäbe zu modellieren. Da die Rippen aber über Verbindungsmittel mit der (starrten) Beplankung gekoppelt sind, war die Entwicklung neuer Stabelemente erforderlich, die sowohl die stabförmigen Rippen als auch den Verbund zwischen Rippen und Beplankung darstellen [33]. Die Eigenschaften des Verbundes sind in Abschnitt 4.2 beschrieben.



**Bild 4-1:** Auseinandergezogene Darstellung der Wandtafel aus Bild 1-1



**Bild 4-2:** VR- und VRV-Elemente zur Modellierung der Rippen und ihrer Verbindungen zu den Platten in der Wandtafel aus Bild 4-1

Innerhalb einer statisch wirksamen Beplankungsebene sind die Rippen üblicherweise entweder mit einer Platte oder mit zwei Platten verbunden (siehe Bild 4-1). Daraus folgt die Notwendigkeit, zwei unterschiedliche Elemente zur gemeinsamen Modellierung der Rippen und des Verbundes zu entwickeln. Das eine Element ist erforderlich, um eine Rippe und ihren Verbund mit einer Platte zu modellieren. Dieses Element wird hier als VR-Element (Verbund-Rippe-Element) bezeichnet. Das VR-Element ist in Kapitel 4.4 ausführlich beschrieben. Das zweite Element dient der Modellierung einer Rippe und ihrer Verbindung mit zwei Platten. Es heißt VRV-Element (Verbund-Rippe-Verbund-Element) und wird in Abschnitt 4.5 erläutert. Der wesentliche Vorteil der beiden neuen Elemente besteht darin, dass die einzelnen Verbindungsmittel zwischen

Rippe und Platte über die gesamte Länge der Verbindung „verschmiert“ werden. Dadurch kann ein ganzer Verbundbereich, der eigentlich aus vielen einzelnen Verbindungsmitteln besteht, mit einem einzigen Element modelliert werden. Der Einbau dieser Elemente in das statische Modell wird in Bild 4-2 veranschaulicht.

Das hier vorgestellte neue Stab-Verbund-Modell entspricht grundsätzlich den Stabmodellen vieler gängiger Stabwerksprogramme, die mit der Deformationsmethode [16] arbeiten. Der wesentliche Unterschied zu den gängigen Stabmodellen besteht in den beiden neuen Elementen.

Die Platten der Beplankung können in einem Stabmodell nicht in Form von Scheiben- oder Schalenelementen modelliert werden. Daher werden sie hier – wie oben bereits erwähnt – vereinfachend durch die starre Kopplung ihrer Eckknoten implementiert. Eine ausführliche Beschreibung der Modellierung der Beplankung erfolgt in Abschnitt 4.5.4.

Wenn sich eine Holztafel unter äußerer Last innerhalb der Tafelebene verformt, führt dies gegebenenfalls zu Berührungen von Rippen oder Platten, die im Stab-Verbund-Modell nicht mit einander verbunden sind. In den Berührungspunkten entstehen Kontaktpressungen, über die Kräfte von einem Bauteil ins andere übertragen werden. Die Berücksichtigung solcher Druckkontakte im Stab-Verbund-Modell ist in den Abschnitten 4.7 und 4.8 dargestellt.

In Wandtafeln haben die Anordnung, die konstruktive Gestalt und die Duktilität von Zugverankerungen wesentlichen Einfluss auf die Verteilung der Beanspruchungen innerhalb der Tafel und auf die Weiterleitung der Kräfte. In Abschnitt 4.9 wird darauf eingegangen.

## 4.2 Struktur des Stab-Verbund-Modells

Die statischen Modelle von Holztafelkonstruktionen werden im hier vorgestellten Stab-Verbund-Modell aus einzelnen ebenen Stabelementen zusammengefügt, die an den Knoten des damit entstehenden Gesamtsystems verbunden sind. Die Freiwerte des Gesamtsystems sind die Knotenweggrößen  $V$ . Diese können mit dem Prinzip der virtuellen Verschiebungen berechnet werden, bei dessen Formulierung die Summe der inneren und der äußeren Arbeiten am Gesamtsystem zu Null wird, wenn Gleichgewicht herrscht:

$$\delta W = \sum_{\text{Elemente}} \delta W_i + \sum_{\text{Elemente}} \delta W_a + \sum_{\text{Knoten}} \delta W_a = 0 \quad (4.1)$$

Die Bedingung aus Gl.(4.1), dass die gesamte virtuelle Arbeit den Wert Null annimmt, entspricht der Forderung, dass die skalaren Werte der inneren und der äußeren virtuellen Arbeiten gleich sein müssen. Mit dem Prinzip der virtuellen Verschiebungen wird damit das Gleichgewicht integral erfüllt. Die virtuellen Verschiebungen, die durch das vorangestellte Symbol  $\delta$  gekennzeichnet werden, sind gedachte Verschiebungen der Punkte eines Körpers, die in den folgenden Betrachtungen als infinitesimal kleine Zuwächse der wirklichen Verschiebungen gesehen werden, so dass für die wirklichen und die virtuellen Verschiebungen dieselben Formfunktionen verwendet werden können. Unter der virtuellen Arbeit versteht man das Produkt aus der virtuellen Verschiebung und der konjugierten wirklichen Kraft bzw. aus der virtuellen Verzerrung und der konjugierten Spannungskomponente. Die Summation aller Anteile der inneren Arbeit, dies sind die Arbeiten, die die Stabschnittgrößen auf den virtuellen Verzerrungen leisten, und der äußeren Arbeit, die die Einwirkungen  $P$  auf den zugeordneten virtuellen Verschiebungen bzw. Verdrehungen der Stäbe und der Knoten leisten (Gl.(4.1)), liefert die Bedingungsgleichungen zur Bestimmung der unbekannten Knotenweggrößen  $V$  in Form des algebraischen Gleichungssystems des Weggrößenverfahrens:

$$K \cdot V = P \quad (4.2)$$

Die Systemsteifigkeitsmatrix  $K$  wird dabei aus den Steifigkeitsmatrizen  $k_i$  der einzelnen Elemente zusammengesetzt, die man durch Einsetzen von Verschiebungsfunktionen in das Prinzip der virtuellen Verschiebungen erhält. Im VR-Element und im VRV-Element werden die Verschiebungsverläufe, die sowohl für die wirklichen als auch für die virtuellen Verschiebungen der Rippenachsen angesetzt werden, mit den strengen Lösungen der Differentialgleichungen des parallel und senkrecht zur Stabachse gebetteten Stabes und unter Berücksichtigung der Verschiebungen der Plattenränder als „Ganzfeldansätze“, die sich über die Länge eines Elements erstrecken, analytisch beschrieben.

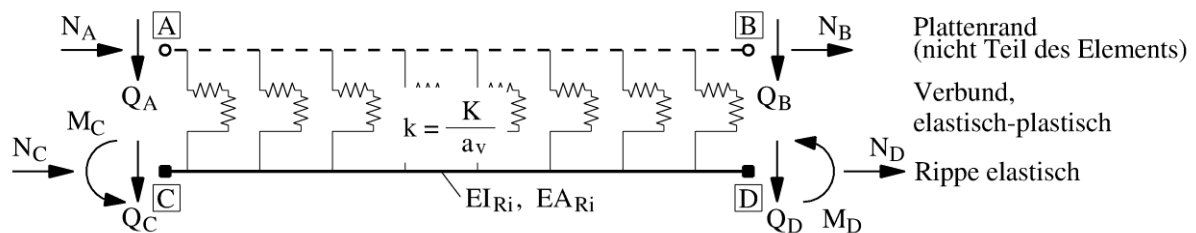
### 4.3 Verbund von Rippen und Beplankung

In Abschnitt 3.2 wurde ein vereinfachtes Werkstoffgesetz für die stabförmigen Verbindungsmittel vorgestellt. Dieses ideal-elastisch-plastische Last-Verschiebungs-Verhalten wird auch hier unterstellt.

## 4.4 VR-Element

### 4.4.1 Elementbeschreibung

In Abschnitt 4.1 wurde bereits dargelegt, dass Tafeln als Stabwerke modelliert werden können, wenn die Beplankung als starr angenommen wird, da das Tragverhalten der Tafel dann durch die Rippenstäbe und ihren Verbund mit der starren Beplankung beschrieben werden kann. Das ebene VR-Element – „VR“ steht hier für Verbund und Rippe – besteht anschaulich aus einer stabförmigen Rippe und ihrem Verbund mit einem (starren) Plattenrand. Der Plattenrand ist jedoch nicht Teil des Elements, sondern wird im Gesamtgleichungssystem durch zwei starr miteinander gekoppelte Knoten modelliert, die die Endpunkte des Plattenrandes darstellen und an die das VR-Element angeschlossen wird (Bild 4-2). Der Verbund besteht innerhalb des VR-Elements nicht aus einzelnen Verbindungsmitteln sondern aus einer kontinuierlichen Verbindung zwischen Rippe und Plattenrand, für die ein ideal-elastisch-plastisches Last-Verschiebungs-Verhalten angenommen wird (siehe Abschnitt 4.3). Folglich verhält sich die Rippe innerhalb des VR-Elements wie ein kontinuierlich in Richtung der Stabachse und senkrecht zur Stabachse gebetteter Balken. Die längenbezogene Steifigkeit  $k$  der Bettung der Rippe gegenüber dem starren Plattenrand ergibt sich bei linear-elastischem Tragverhalten aus dem Verschiebungsmodul  $K$  der einzelnen Verbindungsmittel und dem Verbindungsmittelabstand  $a_v$ . Die Biegesteifigkeit  $EI_{Ri}$  und die Dehnsteifigkeit  $EA_{Ri}$  der Rippe sind mit dieser Verbundsteifigkeit  $k$  gekoppelt, so dass die Rippe und der Verbund nur gemeinsam im VR-Element modellierbar sind.



**Bild 4-3:** VR-Element zur Modellierung einer Rippe und ihrer Verbindung zu einem starren Plattenrand

Das VR-Element, das in Bild 4-3 dargestellt ist, besitzt die vier Elementknoten A, B, C und D. Während die Knoten A und B dem Anschluss des Elements an einen starren Plattenrand dienen, bilden die Knoten C und D die Endpunkte der

Rippenachse. Da die Rippe sowohl die Biegesteifigkeit  $EI_{Ri}$  als auch die Dehnsteifigkeit  $EA_{Ri}$  besitzt, wird sie durch einen Stab mit Biege- und Dehnstabeigenschaften modelliert, der zwischen den Knoten C und D angeordnet ist. Der Verbund koppelt diesen Rippenstab mit der Verbundsteifigkeit  $k$  an die Knoten A und B. Für das VR-Element werden zwei Elementränder definiert. So liegen die Elementknoten A und C auf dem linken Elementrand, während die Knoten B und D dem rechten Elementrand zugeordnet sind.

Die Rippenknoten C und D besitzen im ebenen Element je drei Freiheitsgrade. Dies sind ein Verschiebungsfreiheitsgrad in Richtung der Rippenachse, ein Verschiebungsfreiheitsgrad senkrecht zur Rippenachse und ein Verdrehungsfreiheitsgrad. Die zugehörigen Knotenweggrößen werden mit  $u_C$ ,  $w_C$  und  $\varphi_C$  bzw.  $u_D$ ,  $w_D$  und  $\varphi_D$  bezeichnet. Die konjugierten Kraftgrößen an den Elementrändern sind die Normalkraft  $N_C$ , die Querkraft  $Q_C$  und das Biegemoment  $M_C$  bzw.  $N_D$ ,  $Q_D$  und  $M_D$  der Rippe. Dagegen besitzen die Knoten A und B ausschließlich je einen Verschiebungsfreiheitsgrad parallel und einen senkrecht zum Plattenrand. Die konjugierten Kraftgrößen  $N_A$  und  $Q_A$  bzw.  $N_B$  und  $Q_B$  können anschaulich als die auf den jeweiligen Knoten anfallenden resultierenden Verbundkräfte gedeutet werden. Die Kraftgrößen an den Elementrändern sind in Bild 4-3 gemäß der üblichen Vorzeichenkonvention des Weggrößenverfahrens mit ihren positiven Wirkungsrichtungen dargestellt. Da im realen Verbund durch ein einzelnes Verbindungsmittel rechnerisch kein Biegemoment von der Platte in die Rippe übertragen werden kann, besitzt der Verbund im VR-Element keine längenbezogene Drehsteifigkeit. In den Knoten A und B sind somit keine Verdrehungsfreiheitsgrade erforderlich. Demzufolge hat das VR-Element insgesamt 10 Knotenfreiheitsgrade.

Die Knoten A und C sowie die Knoten B und D sind im unverformten Element koinzident. Die auseinander gezogene Darstellung in Bild 4-3 dient lediglich der Anschaulichkeit.

#### 4.4.2 Formfunktionen des elastischen VR-Elements

Solange der kontinuierliche Verbund des VR-Elements an keiner Stelle seine Fließverschiebung  $u_y$  erreicht (vgl. Bild 3-8), ist die elastische Rippe quasi kontinuierlich elastisch gegen einen starren Plattenrand gebettet. Daher können alle Verschiebungszustände des VR-Elements mit den Differentialgleichungen des parallel und senkrecht zur Stabachse elastisch gebetteten Stabes beschrieben



werden. In einer Berechnung nach Theorie I. Ordnung sind die beiden Richtungen parallel und senkrecht zur Rippenachse unabhängig von einander und können separat betrachtet werden.

Die Differentialgleichung vierter Ordnung für den senkrecht zur Rippenachse gebetteten Stab, der nur durch Einzellasten bzw. -momente beansprucht wird, ist u. a. in [18] angegeben und lautet:

$$w'''' + 4a^4 w = 0 \quad (4.3)$$

$$\text{mit } a = \sqrt[4]{\frac{k}{4EI}} \text{ und der konstanten Verbundsteifigkeit } k = \frac{K}{a_v}.$$

Darin ist  $w$  die Durchbiegung der Rippe,  $EI$  die konstante Biegesteifigkeit der Rippe,  $K$  der Verschiebungsmodul der Verbindungsmittel zwischen Rippe und Beplankung und  $a_v$  der Abstand der Verbindungsmittel untereinander.

Die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung ist u. a. in [18] und [34] angeführt:

$$w(x) = C_1 e^{ax} \cos(ax) + C_2 e^{ax} \sin(ax) + C_3 e^{-ax} \cos(ax) + C_4 e^{-ax} \sin(ax) \quad (4.4)$$

In der Form

$$w(x) = C_1 \cos(ax) \cosh(ax) + C_2 \cos(ax) \sinh(ax) + C_3 \sin(ax) \cosh(ax) + C_4 \sin(ax) \sinh(ax) \quad (4.5)$$

ist diese Lösung u. a. in [37] zu finden. Sie gibt die Funktion  $w(x)$  der Biegelinie eines Bernoulli-Balkens auf elastischer Bettung an. Die Verdrehung  $\varphi(x)$  des Stabquerschnitts ist durch die erste Ableitung von Gl. (4.5) gegeben:

$$\varphi(x) = w'(x) = a \cdot \begin{pmatrix} C_1 (\cos(ax) \sinh(ax) - \sin(ax) \cosh(ax)) \\ + C_2 (\cos(ax) \cosh(ax) - \sin(ax) \sinh(ax)) \\ + C_3 (\cos(ax) \cosh(ax) + \sin(ax) \sinh(ax)) \\ + C_4 (\cos(ax) \sinh(ax) + \sin(ax) \cosh(ax)) \end{pmatrix} \quad (4.6)$$

Die Funktionsverläufe für die Verschiebung bzw. die Verdrehung der Rippe, im Folgenden werden sie Formfunktionen genannt, erhält man durch die Aufbringung von Einheitsverformungen auf die Elementknoten. Die zehn Einheitsverformungszustände des VR-Elements sind in Bild 4-5 dargestellt. Darin werden Verschiebungen parallel zur Rippenachse mit „u“, Verschiebungen senkrecht mit „w“ bezeichnet. Der erste Index jeder Funktion gibt an, ob es sich um eine Verschiebung der Rippe („Ri“) oder des Plattenrandes („Pl“) handelt. Der zwei-

te Index beschreibt die Ursache der Verschiebung, die entweder eine Knotenverschiebung parallel („u“) oder senkrecht („w“) zur Rippenachse oder eine Knotenverdrehung („φ“) ist, während der dritte Index den Ort der Ursache angibt, der in einem der vier Elementknoten A, B, C oder D liegt.

Durch Einsetzen der Randbedingungen, die sich infolge einer Einheitsverschiebung bzw. -verdrehung eines der vier Elementknoten ergeben, in die Gleichungen (4.5) und (4.6), erhält man ein lineares Gleichungssystem mit vier Bestimmungsgleichungen, die die unbekannten Integrationskonstanten  $C_1$  bis  $C_4$  enthalten. Durch die Lösung des Gleichungssystems können die Integrationskonstanten bestimmt und in die Gleichung (4.5) eingesetzt werden. Das Ergebnis ist die Formfunktion der Biegelinie bzw. der Längsverschiebung der Rippe im betrachteten Einheitsverformungszustand. Die Formfunktionen der Biegelinien bzw. Längsverschiebungen der Rippe des VR-Elements in Bild 4-5 sind im Anhang A vollständig dargestellt. Das oben beschriebene Vorgehen zur Ermittlung dieser Gleichungen wird nachfolgend am Beispiel der Biegelinie  $w_{\text{Ri,w,C}}$  infolge der Einheitsverschiebung  $w_C=1$  des Rippenknotens C veranschaulicht (vgl. Bild 4-5):

Während der linke Rippenknoten C um 1 senkrecht zur Rippenachse verschoben wird, bleiben die übrigen Elementknoten A, B und D unverschoben. Auch die Verdrehungen der Rippenknoten C und D bleiben Null. Durch Einsetzen dieser Verschiebungsrandbedingungen in Gl. (4.5) und Verdrehungsrandbedingungen in Gl. (4.6) erhält man folgendes lineares Gleichungssystem:

$$\begin{aligned}
 w(0) &= 1 && \Rightarrow C_1 = 1 \\
 w'(0) &= 0 && \Rightarrow a(C_2 + C_3) = 0 \\
 w(\ell) &= 0 && \Rightarrow \begin{pmatrix} C_1 \cos(a\ell) \cosh(a\ell) + C_2 \cos(a\ell) \sinh(a\ell) \\ + C_3 \sin(a\ell) \cosh(a\ell) + C_4 \sin(a\ell) \sinh(a\ell) \end{pmatrix} = 0 \\
 w'(\ell) &= 0 && \Rightarrow a \cdot \begin{pmatrix} C_1 (\cos(a\ell) \sinh(a\ell) - \sin(a\ell) \cosh(a\ell)) \\ + C_2 (\cos(a\ell) \cosh(a\ell) - \sin(a\ell) \sinh(a\ell)) \\ + C_3 (\cos(a\ell) \cosh(a\ell) + \sin(a\ell) \sinh(a\ell)) \\ + C_4 (\cos(a\ell) \sinh(a\ell) + \sin(a\ell) \cosh(a\ell)) \end{pmatrix} = 0
 \end{aligned} \tag{4.7}$$

Durch lösen des Gleichungssystems (4.7) erhält man die Integrationskonstanten  $C_1$  bis  $C_4$ . Aus Gründen der Übersichtlichkeit sind die länglichen Ausdrücke hier nicht dargestellt. Einsetzen von  $C_1$  bis  $C_4$  in Gl. (4.5) liefert die Funktion der Biegelinie  $w_{\text{Ri,w,C}}$  der Rippe infolge der Einheitsverschiebung  $w_C=1$ :

$$w_{\text{Ri},w,C}(x) = \frac{\cos(\eta)\cosh(\xi) + \cos(\xi)\cosh(\eta) - 2\cos(\xi)\cosh(\xi) - \sin(\eta)\sinh(\xi) + \sin(\xi)\sinh(\eta)}{\cos(2a\ell) + \cosh(2a\ell) - 2} \quad (4.8)$$

mit  $\eta = a(2\ell - x)$  und  $\xi = ax$ . Hier ist anzumerken, dass die Biegelinie  $w_{\text{Ri},w,C}$  ausschließlich mit der Lösung (Gl. (4.5)) der Differentialgleichung (Gl.(4.3)) des gebetteten Balkens beschrieben werden kann, da der starre Plattenrand, der im VR-Element durch die Knoten A und B berücksichtigt ist, unverschoben bleibt. Bei Biegelinien der Rippe, die aus Einheitsverschiebungszuständen der Knoten A und B resultieren, ist dies nicht möglich, da die Durchbiegung  $w$  der Rippe über die Verbundsteifigkeit  $k$  mit der Verschiebung des Plattenrandes gekoppelt ist. In solchen Fällen kann die Durchbiegung  $w$  der Rippe aus der Superposition zweier Biegelinien gewonnen werden, von denen eine auf den elastisch gebetteten Balken zurückzuführen ist, während die andere die Verschiebung des Plattenrandes beschreibt. Am Beispiel der Biegelinie  $w_{\text{Ri},w,A}$  der Rippe, die aus der Einheitsverschiebung  $w_A=1$  des linken Plattenrandknotens A senkrecht zur Rippenachse folgt (vgl. Bild 4-5), wird dies im Folgenden gezeigt:

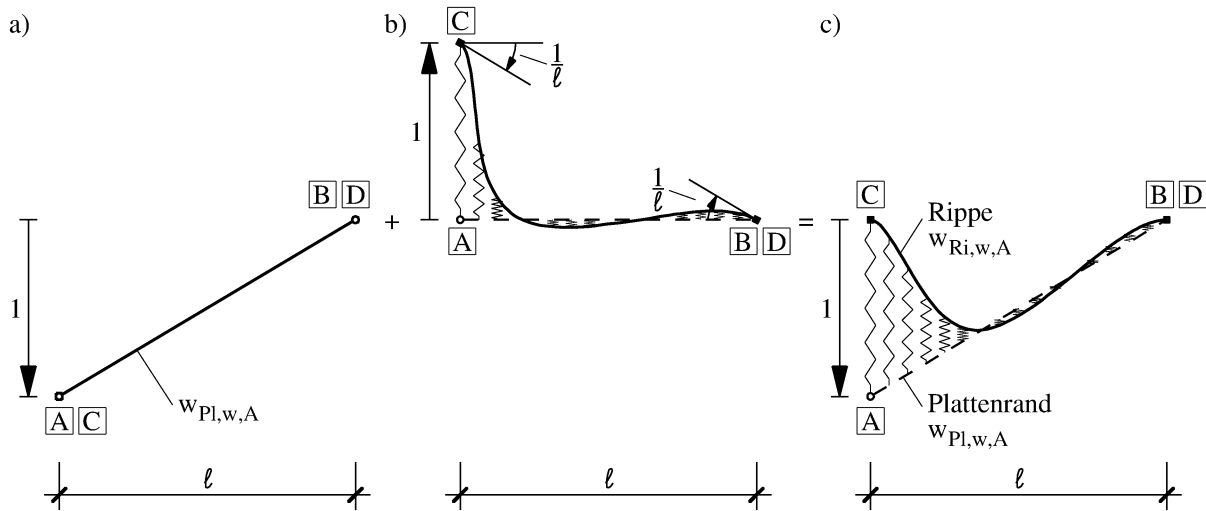
Zunächst werden die Rippenknoten C und D als nicht gelagert angenommen. Wenn der Plattenrandknoten A um  $w_A=1$  ausgelenkt wird, folgt die Rippe der Verschiebung des Plattenrandes, da sie über die Verbundsteifigkeit  $k$  an den Plattenrand gekoppelt ist (Bild 4-4a). Dabei bleibt die Rippe spannungslos, da sie keinerlei Biegung oder Dehnung erfährt. Um die Rippenknoten C und D nun wieder in ihren Ausgangszustand zu bringen, ohne die Verschiebung der Plattenrandknoten A und B zu ändern, muss der Verschiebungszustand in Bild 4-4a mit dem Verschiebungszustand in Bild 4-4b überlagert werden. Dieser resultiert aus einer Verschiebung des Rippenknotens C um -1 bei gleichzeitiger Verdrehung der Rippenknoten C und D um den Winkel  $1/\ell$  (im Bogenmaß). Das Ergebnis der Überlagerung, das einer Auslenkung des Knotens A bei gleichzeitiger Festhaltung der Knoten B, C und D entspricht, zeigt Bild 4-4c.

Die Verschiebung des starren Plattenrandes in Bild 4-4a und c kann mit der Gradengleichung

$$w_{\text{Pl},w,A}(x) = 1 - \frac{x}{\ell} \quad (4.9)$$

beschrieben werden. Die Funktion der Biegelinie der Rippe aus Bild 4-4b erhält man durch Einsetzen der Randbedingungen  $w(0)=-1$ ,  $w'(0)=1/\ell$ ,  $w(\ell)=0$  und

$w'(\ell)=1/\ell$  in die Gleichungen (4.5) und (4.6). Die Addition dieser Funktion mit Gl. (4.9) ergibt die Biegelinie  $w_{\text{Ri},w,A}$ .



**Bild 4-4:** Superposition von Verschiebungszuständen im VR-Element

Parallel zur Stabachse wird die elastische Bettung des Stabes, der ausschließlich an den Stabenden durch Einzellasten belastet ist, durch die Differentialgleichung

$$u'' - \frac{k}{EA} u = 0 \quad (4.10)$$

beschrieben, deren allgemeine Lösung

$$u(x) = C_1 \cosh(\lambda x) + C_2 \sinh(\lambda x) \quad \text{mit } \lambda = \sqrt{\frac{k}{EA}} \quad (4.11)$$

lautet [37]. Darin ist  $EA$  die konstante Dehnsteifigkeit der Rippe und  $k$  die längenbezogene Verbundsteifigkeit parallel zur Rippenachse. Analog zum Vorgehen senkrecht zur Rippenachse erhält man auch die Ansatzfunktionen für die Verschiebungen parallel zur Rippenachse durch Einsetzen der Randbedingungen in die allgemeine Lösung der Differentialgleichung. Die Verschiebung des rechten Rippenknotens D um  $u_D=1$  parallel zur Rippenachse (vgl. Bild 4-5) führt beispielsweise auf folgendes lineares Gleichungssystem mit den unbekannten Integrationskonstanten  $C_1$  und  $C_2$ :

$$\begin{aligned} u(0) &= 0 &\Rightarrow C_1 &= 0 \\ u(\ell) &= 1 &\Rightarrow C_1 \cosh(\lambda \ell) + C_2 \sinh(\lambda \ell) &= 1 \end{aligned} \quad (4.12)$$

Aus den Gleichungen (4.12) folgt

$$C_2 = \frac{1}{\sinh(\lambda \ell)} \quad (4.13)$$

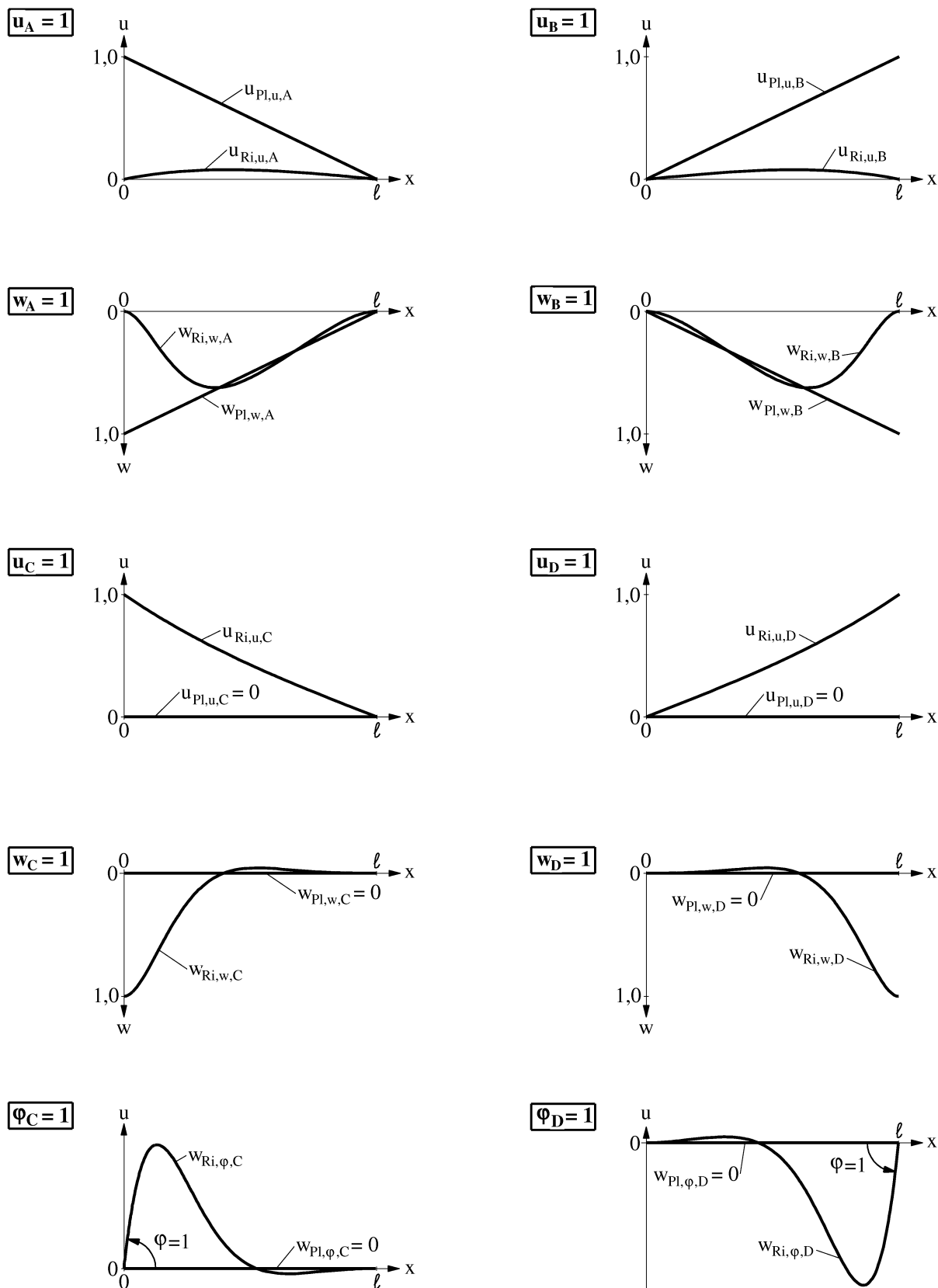
Nach dem Einsetzen der Integrationskonstanten  $C_1$  und  $C_2$  in Gl. (4.11) ist die Funktion  $u_{\text{Ri},u,D}$  (siehe Bild 4-5), die aus der Einheitsverschiebung  $u_D=1$  am Knoten D resultiert, bekannt:

$$u_{\text{Ri},u,D}(x) = \frac{\sinh(\lambda x)}{\sinh(\lambda \ell)} \quad (4.14)$$

Auch parallel zur Rippenachse sind die Verschiebungen der Rippe über die Verbundsteifigkeit  $k$  mit den Verschiebungen der Plattenrandknoten A und B gekoppelt. Da der Plattenrand als starr angenommen wird, sind lineare Ansatzfunktionen zur Beschreibung der Verschiebungen im Plattenrand infolge Einheitsverschiebungen in den Knoten A und B geeignet. So lautet z. B. die Ansatzfunktion für die Längsverschiebungen im Plattenrand infolge einer Einheitsverschiebung  $u_B=1$  des Knoten B:

$$u_{\text{Pl},u,B}(x) = \frac{x}{\ell} \quad (4.15)$$

Durch die Wahl linearer Ansatzfunktionen sind die Knoten A und B innerhalb des VR-Elements in Richtung der Rippenachse zunächst unabhängig voneinander verschiebbar. Auf Systemebene werden diese Knoten jedoch starr miteinander gekoppelt (siehe Abschnitt 4.5.4), so dass die Knoten A und B parallel zur Rippenachse immer dieselbe Verschiebung  $u$  erfahren. Wird nun z. B. der Plattenrandknoten B um  $u_B=1$  verschoben, so folgt die Funktion  $u_{\text{Ri},u,B}$  für die Längsverschiebung der Rippe aus der Addition von Gl. (4.15) mit einer Funktion, die durch Einsetzen der Randbedingungen  $u_A=0$  und  $u_B=-1$  in Gl. (4.11), anschließendes Lösen des Gleichungssystems und Einsetzen der Integrationskonstanten  $C_1$  und  $C_2$  in Gl. (4.11) gewonnen wurde.

**Bild 4-5:** Einheitsverformungszustände im VR-Element

#### 4.4.3 Steifigkeitsmatrix des elastischen VR-Elements

Die Steifigkeitsmatrix  $k^i$  eines Elements  $i$  definiert die Größe der Kraftgrößen bzw. Momente, die infolge einer Verschiebung bzw. Verdrehung der Größe 1 an den Elementknoten vorhanden sind.

Die Grundlage für die Aufstellung der Steifigkeitsmatrix bildet hier die Arbeitsgleichung des Prinzips der virtuellen Verschiebungen. Diese wird zunächst für das einzelne VR-Element in Weggrößenformulierung angeschrieben. Anschließend werden die Formfunktionen des VR-Elements, die in Abschnitt 4.4.2 beschrieben sind, in die Arbeitsgleichung eingesetzt und die analytische Integration durchgeführt. Aus der so erhaltenen diskreten Form der Arbeitsgleichung kann die Steifigkeitsmatrix des VR-Elements zusammengestellt werden.

In der Arbeitsgleichung des Prinzips der virtuellen Verschiebungen des VR-Elements sind die inneren und äußeren Arbeiten im Gebiet und die Arbeiten auf den Rändern enthalten. Letztere heben sich jedoch bei der Addition der Elementarbeiten zur Systemarbeit im Inneren des Gesamtsystems auf und müssen daher auf Elementebene nicht berücksichtigt werden. Für das einzelne VR-Element, das im Gebiet nicht durch Streckenlasten oder -momente belastet ist, lautet die Arbeitsgleichung somit:

$$-\delta A_{\text{el.}} = \int N \delta \varepsilon \, dx + \int s_0 \delta u \, dx + \int M \delta \kappa \, dx + \int s_{90} \delta w \, dx = 0 \quad (4.16)$$

In Richtung der Rippenachse leistet die Normalkraft  $N$  der Rippe virtuelle Arbeit auf der virtuellen Dehnung  $\delta \varepsilon$  und die Verbundbeanspruchung  $s_0$  leistet Arbeit auf den virtuellen Verschiebungen  $\delta u$  des Plattenrandes und der Rippe. Senkrecht zur Rippenachse leistet das Biegemoment  $M$  virtuelle Arbeit auf der virtuellen Krümmung  $\delta \kappa$  der Rippe und die Verbundbeanspruchung  $s_{90}$  leistet Arbeit auf den virtuellen Verschiebungen  $\delta w$  des Plattenrandes und der Rippe. Durch Einsetzen der Verformungsgeometrie

$$\left. \begin{array}{l} u' = \varepsilon \\ w' = \varphi \\ \varphi' = \kappa \end{array} \right\} \Rightarrow w'' = \kappa \quad (4.17)$$

und der Werkstoffgesetze

$$\begin{aligned} N &= EA \cdot \varepsilon \\ M &= -EI \cdot \kappa \end{aligned} \quad (4.18)$$

sowie der Beziehungen

$$\begin{aligned} s_0 &= k \cdot u_v \\ s_{90} &= k \cdot w_v \end{aligned} \quad (4.19)$$

in das Gleichgewicht in Gl.(4.16) erhält man die Arbeitsgleichung des VR-Elements in Weggrößenformulierung, d. h. die Unbekannten in dieser Gleichung sind die Knotenverschiebungen  $u$  und  $w$  bzw. deren Ableitungen:

$$-\delta A_{\text{el.}} = \int u' EA \delta u' dx + \int u_v k \delta u_v dx + \int w'' EI \delta w'' dx + \int w_v k \delta w_v dx \quad (4.20)$$

Darin sind  $\delta u$  und  $\delta w$  die virtuellen Verschiebungen der Rippe bzw. des Plattenrandes parallel und senkrecht zur Rippenachse während  $u_v$  und  $w_v$  die wirklichen Verschiebungen des Verbundes kennzeichnen, die aus Relativverschiebungen der Rippe gegenüber dem Plattenrand resultieren. Den Verlauf der Verschiebungen im Gebiet erhält man durch die Multiplikation der in Bild 4-5 dargestellten Formfunktionen (Einheitsverformungszustände) mit den Knotenweggrößen. Demnach kann die Steifigkeitsmatrix  $K_{\text{VR}}$  des VR-Elements durch die analytische Integration der nachfolgend in Matrizenschreibweise dargestellten Produkte aus Formfunktionen und Steifigkeiten ermittelt werden. Für die Darstellung der Integration erweist es sich als vorteilhaft, die Matrix  $K_{\text{VR}}$  in vier Untermatrizen zu gliedern:

$$K_{\text{VR}} = \begin{bmatrix} K_{\text{Pl}} & K_{\text{Ri-Pl}} \\ K_{\text{Pl-Ri}} & K_{\text{Ri}} \end{bmatrix}. \quad (4.21)$$

Anschaulich beschreiben die Einträge der Untermatrix  $K_{\text{Pl}}$  die Knotenkräfte, die infolge der wirklichen Verschiebungen des Verbundes an den Plattenknoten A und B entstehen und die auf den konjugierten virtuellen Verschiebungen des Plattenrandes Arbeit leisten. Folglich erhält man die Untermatrix  $K_{\text{Pl}}$  durch die Multiplikation der transponierten Matrix  $\delta v_{\text{PR}}$ , die die Formfunktionen der virtuellen Verschiebungen des Plattenrandes enthält, mit der Verbundsteifigkeit  $k$  und mit der Matrix  $v_{\text{VB}}$ , die die Formfunktionen für die Verbundverschiebungen als Differenz von Rippen- und Plattenrandverschiebungen enthält sowie anschließender analytischer Integration dieses Produktes über die Elementlänge  $\ell$ :

$$\delta v_{\text{PR}} = \begin{pmatrix} \delta u_{\text{Pl},u,A} & 0 & \delta u_{\text{Pl},u,B} & 0 \\ 0 & \delta w_{\text{Pl},w,A} & 0 & \delta w_{\text{Pl},w,B} \end{pmatrix} \quad (4.22)$$

$$v_{\text{VB}} = \begin{pmatrix} u_{\text{Pl},u,A} - u_{\text{Ri},u,A} & 0 & u_{\text{Pl},u,B} - u_{\text{Ri},u,B} & 0 \\ 0 & w_{\text{Pl},w,A} - w_{\text{Ri},w,A} & 0 & w_{\text{Pl},w,B} - w_{\text{Ri},w,B} \end{pmatrix} \quad (4.23)$$



$$K_{PI} = \int_0^l k \delta v_{PR}^T v_{VB} dx \quad (4.24)$$

Die Einträge der Untermatrix  $K_{PI-Ri}$  in Gl.(4.21) sind aus drei Anteilen zusammengesetzt. Der erste Anteil beschreibt anschaulich die Knotenkräfte, die infolge der wirklichen Verschiebungen  $v_{VB}$  (Gl.(4.23)) des Verbundes an den Rippenknoten C und D entstehen und die auf den konjugierten virtuellen Verschiebungen der Rippe, die in der Matrix  $\delta v_{Ri}$  (Gl.(4.25)) zusammengefasst sind, Arbeit leisten. Diese Verschiebungen des Verbundes rufen in den Rippenknoten Schnittgrößen hervor, die auf den virtuellen Knotenverschiebungen der Rippe Arbeit leisten und die dem zweiten bzw. dritten Anteil der Einträge entsprechen. In Richtung der Rippenachse sind dies die Stabendnormalkräfte der Rippe, die aus den Verbundverschiebungen  $u'_{VB}$  (Gl.(4.26)) resultieren, und die auf den virtuellen Knotenweggrößen  $\delta u'_{Ri}$  (Gl.(4.27)) der Rippenknoten C und D Arbeit leisten. Senkrecht zur Rippenachse sind dies die Stabendquerkräfte bzw. die Stabendmomente, die ebenfalls aus den Verbundverschiebungen resultieren, und die auf den virtuellen Knotenverschiebungen bzw. –verdrehungen der Rippe Arbeit leisten. Da die Verbundverschiebungen, die in der Matrix  $v_{VB}$  in Gl. (4.23) für den Plattenrand positiv definiert sind, bezogen auf die Rippe in die entgegengesetzte Richtung weisen, erhalten die Arbeitsterme in Gl. (4.30) ein negatives Vorzeichen:

$$\delta v_{Ri} = \begin{pmatrix} \delta u_{Ri,u,C} & 0 & 0 & \delta u_{Ri,u,D} & 0 & 0 \\ 0 & \delta w_{Ri,w,C} & \delta w_{Ri,\varphi,C} & 0 & \delta w_{Ri,w,D} & \delta w_{Ri,\varphi,D} \end{pmatrix} \quad (4.25)$$

$$u'_{VB} = \begin{pmatrix} u'_{Pl,u,A} - u'_{Ri,u,A} & 0 & u'_{Pl,u,B} - u'_{Ri,u,B} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.26)$$

$$\delta u'_{Ri} = \begin{pmatrix} \delta u'_{Ri,u,C} & 0 & 0 & \delta u'_{Ri,u,D} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.27)$$

$$w''_{VB} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & w''_{Pl,w,A} - w''_{Ri,w,A} & 0 & w''_{Pl,w,B} - w''_{Ri,w,B} \end{pmatrix} \quad (4.28)$$

$$\delta w''_{Ri} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \delta w''_{Ri,w,C} & \delta w''_{Ri,\varphi,C} & 0 & \delta w''_{Ri,w,D} & \delta w''_{Ri,\varphi,D} \end{pmatrix} \quad (4.29)$$

$$K_{PI-Ri} = - \int_0^l k \delta v_{Ri}^T v_{VB} dx - \int_0^l EA \delta u_{Ri}^T u'_{VB} dx - \int_0^l EI \delta w_{Ri}^T w''_{VB} dx \quad (4.30)$$

Die Einträge der Untermatrix  $K_{Ri-PI}$  beschreiben anschaulich die Knotenkräfte, die infolge der wirklichen Verschiebungen  $v_{Ri}$  (Gl.(4.31)) der Rippe durch die Verschiebungen des Verbundes in den Rippenknoten C und D entstehen und die auf den virtuellen Verschiebungen  $\delta v_{PR}$  (Gl.(4.22)) des Plattenrandes Arbeit leisten. Da auch hier die Verbundverschiebungen infolge positiver Knotenverschie-

bungen bezogen auf die Rippe negativ sind, erhalten die Arbeitsterme in Gl. (4.32) ein negatives Vorzeichen:

$$v_{\text{Ri}} = \begin{pmatrix} u_{\text{Ri},u,C} & 0 & 0 & u_{\text{Ri},u,D} & 0 & 0 \\ 0 & w_{\text{Ri},w,C} & w_{\text{Ri},\varphi,C} & 0 & w_{\text{Ri},w,D} & w_{\text{Ri},\varphi,D} \end{pmatrix} \quad (4.31)$$

$$K_{\text{Ri-Pl}} = - \int_0^l k \delta v_{\text{PR}}^T v_{\text{Ri}} dx \quad (4.32)$$

Die Kräfte bzw. Momente an den Stabenden, die infolge der wirklichen Verschiebungen der Rippe an den Rippenknoten C und D entstehen und die auf den konjugierten virtuellen Verschiebungen bzw. Verdrehungen der Rippenknoten Arbeit leisten, sind in den drei Anteilen der Untermatrix  $K_{\text{Ri}}$  zusammengefasst (Gl.(4.35)).

$$u'_{\text{Ri}} = \begin{pmatrix} u'_{\text{Ri},u,C} & 0 & 0 & u'_{\text{Ri},u,D} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.33)$$

$$w''_{\text{Ri}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & w''_{\text{Ri},w,C} & w''_{\text{Ri},\varphi,C} & 0 & w''_{\text{Ri},w,D} & w''_{\text{Ri},\varphi,D} \end{pmatrix} \quad (4.34)$$

$$K_{\text{Ri}} = \int_0^l k \delta v_{\text{Ri}}^T v_{\text{Ri}} dx + \int_0^l EA \delta u'_{\text{Ri}}^T u'_{\text{Ri}} dx + \int_0^l EI \delta w''_{\text{Ri}}^T w''_{\text{Ri}} dx \quad (4.35)$$

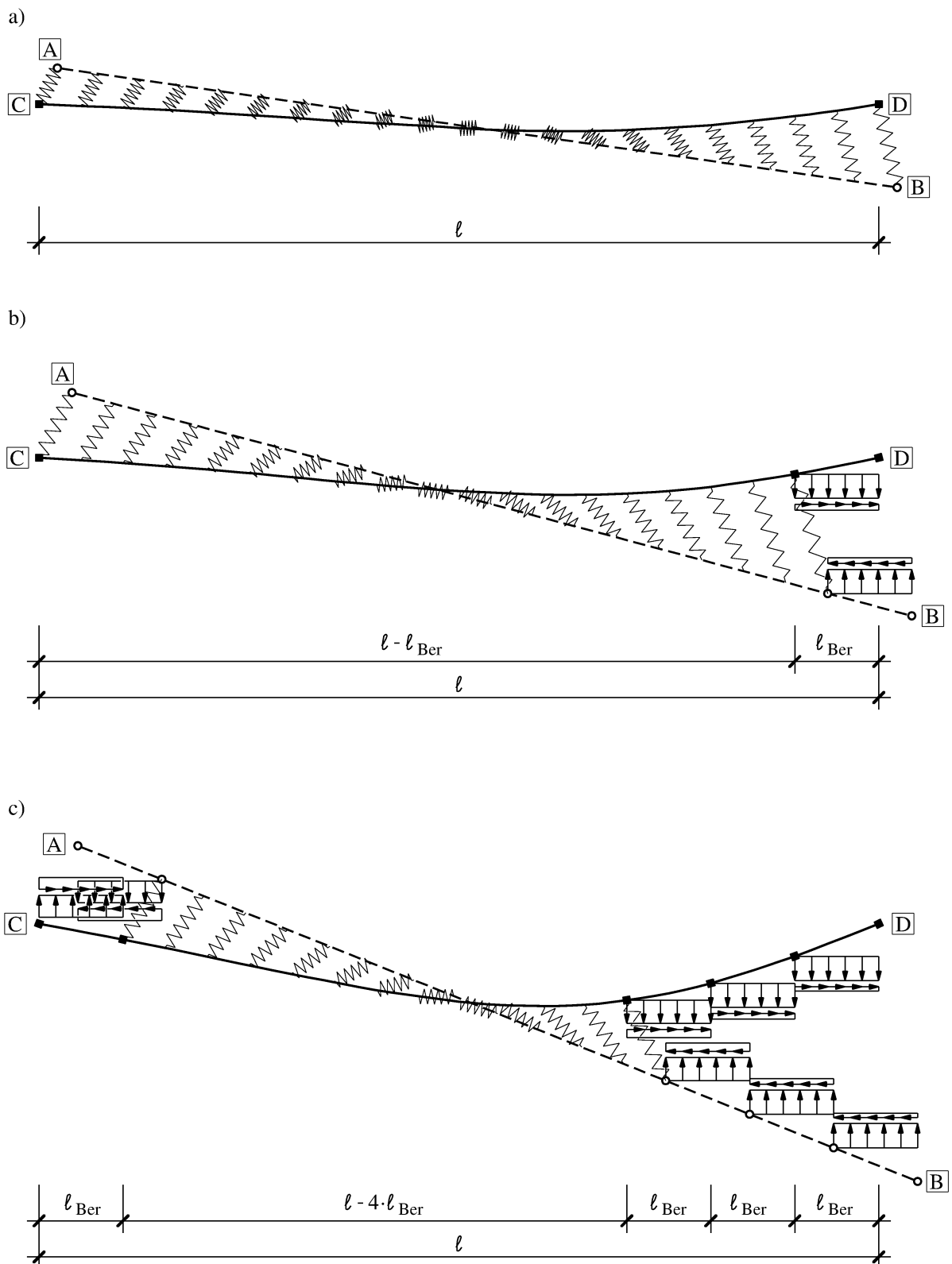
Die in den Gleichungen (4.22) bis (4.35) angeführten Formfunktionen, die für die wirklichen und die virtuellen Verschiebungen jeweils identisch sind, wurden in Abschnitt 4.4.2 hergeleitet und sind im Anhang A ausführlich dargestellt. Die vollständige Steifigkeitsmatrix des elastischen VR-Elements ist im Anhang B zu finden.

#### 4.4.4 Steifigkeitsmatrix des VR-Elements mit teil- oder vollplastischem Verbund

Solange die resultierende Verschiebung des Verbundes an keiner Stelle die Fließverschiebung  $u_y$  überschreitet, verhält sich der Verbund entsprechend Bild 3-8 linear-elastisch. Ein solcher Zustand ist in Bild 4-6a dargestellt. Das gesamte Element kann in diesem Zustand mit den in Abschnitt 4.4.2 angegebenen Formfunktionen und mit der in Abschnitt 4.4.3 angegebenen Elementsteifigkeitsmatrix beschrieben werden.

Wird das Element über seinen elastischen Grenzzustand hinaus weiter verschoben, so beginnt der Verbund an den Stellen zu plastifizieren, an denen die resultierende Verbundverschiebung größer als die Fließverschiebung  $u_y$  ist. Unabhängig von der Größe der Verschiebung ist die resultierende Verbundbeanspruchung  $s_{\text{res,pl}} = R/a_v$  dann konstant (vgl. Bild 3-8). Würde man die Verbundstei-

figkeit  $k$  weiterhin linear-elastisch modellieren, müsste sie in Abhängigkeit von der resultierenden Verbundverschiebung über die Elementlänge  $\ell$  veränderlich sein. Einfacher lässt sich das nunmehr physikalisch nichtlineare Verhalten des Verbundes modellieren, wenn das Element in elastische und plastische Bereiche gegliedert wird. Die Stelle des Übergangs zwischen einem elastischen und einem plastischen Bereich ist dann abhängig vom Verschiebungszustand des Elements. In einem Algorithmus zur Bestimmung des plastischen Grenzzustandes des Tragwerks könnte diese Stelle iterativ gefunden werden. Angesichts der Vielzahl der Übergangsstellen innerhalb größerer Tragwerke und der darüber hinaus ggf. zusätzlich erforderlichen Iterationen bzgl. der in Abschnitt 4.4.5 beschriebenen Ersatzlasten könnte ein solcher Algorithmus jedoch schlecht oder gar nicht gegen den gesuchten plastischen Grenzzustand konvergieren. Daher wird den plastischen Verbundbereichen im Folgenden eine feste Länge  $\ell_{\text{Ber}}$  zugewiesen. Demnach wird ein VR-Element, dessen Verbund teilweise fließt, in plastische Bereiche mit festen Bereichslängen  $\ell_{\text{Ber}}$  und in elastische Bereiche gegliedert. Die elastischen Bereiche entsprechen VR-Elementen, deren Elementlängen gleich den Bereichslängen sind, die ein Vielfaches von  $\ell_{\text{Ber}}$  betragen können. Die plastischen Bereiche können ebenfalls mit VR-Elementen modelliert werden. Dazu wird die Verbundsteifigkeit  $k = K/a_v$  zu Null gesetzt, um die lineare Abhängigkeit der Verbundspannungen von den Verbundverschiebungen zu eliminieren. Die im plastischen Zustand des Verbundes konstante resultierende Verbundbeanspruchung  $s_{\text{res}}$  wird dann nicht mehr durch die Federsteifigkeit und die Verschiebung des Verbundes berücksichtigt, sondern in Form von Ersatzlasten auf den plastischen Bereich angesetzt. Diese Ersatzlasten wirken sowohl auf die Rippe als auch mit gleicher Größe aber entgegengesetzter Wirkungsrichtung auf den Plattenrand. Folglich bilden die Ersatzlasten in jedem plastischen Elementbereich eine Ersatzlastgruppe. Vereinfachend werden die Ersatzlasten als über die Bereichslänge  $\ell_{\text{Ber}}$  konstant wirkend angenommen. Abhängig von ihrer Krafrichtung wird die resultierende Verbundbeanspruchung  $s_{\text{res}}$  in eine Komponente  $s_0$  parallel und eine Komponente  $s_{90}$  senkrecht zur Rippenachse zerlegt, wie ausführlich in Abschnitt 4.4.5 beschrieben wird.



**Bild 4-6:** VR-Element a) im elastischen Grenzzustand, b) mit einem plastischen Verbundbereich, c) mit vier plastischen Verbundbereichen

In dem Beispiel in Bild 4-6b wurde der Verbund des VR-Elements zwischen den Knoten B und D über die Fließverschiebung  $u_y$  hinaus verschoben. Das Element

der Länge  $\ell$  wird nun in einen elastischen Bereich der Länge  $\ell - \ell_{\text{Ber}}$  und einen plastischen Bereich der Länge  $\ell_{\text{Ber}}$  gegliedert. Während sich das VR-Element, das den elastischen Bereich darstellt, in seinen Eigenschaften ausschließlich durch die Elementlänge von dem Element in Bild 4-6a unterscheidet, besitzt das VR-Element des plastischen Verbundbereichs keine Verbundsteifigkeit mehr und ist stattdessen durch eine Ersatzlastgruppe belastet.

Eine weitere Verschiebung des Plattenrandes gegenüber der Rippe bewirkt, dass das Element sukzessive in weitere elastische und plastische Bereiche unterteilt wird. In Bild 4-6c ist das VR-Element aus Bild 4-6a mit vier plastischen Bereichen dargestellt. Der verbleibende elastische Bereich wird hier mit einem VR-Element der Länge  $\ell - 4\ell_{\text{Ber}}$  modelliert. Die plastischen Bereiche mit den Bereichslängen  $\ell_{\text{Ber}}$  besitzen Ersatzlastgruppen mit der resultierenden Verbundbeanspruchbarkeit  $s_{\text{res}}$ , die abhängig vom Verschiebungszustand des jeweiligen Bereichs unterschiedlich große Lastkomponenten  $s_0$  und  $s_{90}$  aufweisen.

Wenn die Verschiebungen des VR-Elements aus Bild 4-6a so groß werden, dass der Verbund an jeder Stelle plastisch ist, besteht das Element ausschließlich aus Bereichen der Länge  $\ell_{\text{Ber}}$  mit entsprechenden Ersatzlastgruppen. Dann ist die Beanspruchung gleich der Beanspruchbarkeit des Elements. In diesem Zustand ist das Element kinematisch, da die Rippe gegenüber dem Plattenrand verschoben werden kann, ohne dass sich die Beanspruchungen des Elements ändern.

Die Gliederung des Elements in elastische und plastische Bereiche ist nur mit Zwischenknoten innerhalb des Elements möglich. Das aus zwei Bereichen bestehende Element in Bild 4-6b besitzt neben den Elementknoten A, B, C und D auch zwei Zwischenknoten und das in fünf Bereiche gegliederte Element in Bild 4-6c hat acht Zwischenknoten. Die Zwischenknoten der Rippe besitzen dabei wie die Endknoten C und D der Rippe je drei Freiheitsgrade. Dies sind die Verschiebungen parallel und senkrecht zur Rippenachse sowie die Verdrehung des Knotens. Die Zwischenknoten am Plattenrand besitzen wie die Knoten A und B je zwei Verschiebungsfreiheitsgrade. Mit steigender Anzahl der plastischen Bereiche steigt daher die Anzahl der Knoten und der Freiheitsgrade des Gesamtsystems. Aus programmorganisatorischer Sicht ist dies nachteilig, da sich das Gesamtsystem aus Gesamtsteifigkeitsmatrix, Freiwertevektor und Lastvektor nach Durchführung der nichtlinearen Berechnung deutlich von den Eingaben zu Beginn der Berechnung unterscheidet.

Um die Anzahl der Systemknoten und damit der Freiheitsgrade konstant zu halten, werden die einzelnen elastischen und plastischen Bereiche mittels statischer Kondensation ([45], Kap. 7.6) wieder zu einem Element zusammengefasst, das dieselben Freiheitsgrade besitzt wie das vor Erreichen des elastischen Grenzzustandes eingegebene VR-Element. Das Vorgehen wird im Folgenden beschrieben.

Vor dem Erreichen des elastischen Grenzzustandes besitzt das VR-Element die in Gl.(4.21) und im Anhang B dargestellte Elementsteifigkeitsmatrix  $K_{VR}$ . Die vier Knoten des VR-Elements haben insgesamt 10 Freiheitsgrade, die im Vektor  $V_{VR}$  enthalten sind.

Ist nach dem Überschreiten des elastischen Grenzzustandes für jeden elastischen oder plastischen Bereich eine eigene 10x10-Steifigkeitsmatrix vorhanden, so können diese Bereichsmatrizen zu einer elementinternen Gesamtsteifigkeitsmatrix aufaddiert werden. Der Vektor der Freiheitsgrade enthält dann sämtliche Knotenfreiheitsgrade der ursprünglichen Elementknoten und der Zwischenknoten. Sortiert man die Freiheitsgrade der ursprünglichen Elementknoten A, B, C und D, im Folgenden unabhängige Freiheitsgrade genannt, in die oberen Zeilen des Freiheitsvektors, kann dieser in einen Vektor  $v_1$  der unabhängigen und einen Vektor  $v_2$  der abhängigen Freiheitsgrade unterteilt werden. Letztere stellen die Freiheitsgrade der Zwischenknoten dar. Entsprechend können die den ursprünglichen Elementknoten zugeordneten Einträge der elementinternen Gesamtsteifigkeitsmatrix zu einer Untermatrix  $K_{11}$  zusammengefasst werden. Mit den in Abschnitt 4.4.5 beschriebenen Ersatzlasten, die in einem Vektor  $p_1$  der auf die Knoten A, B, C und D wirkenden Ersatzlasten und einem Vektor  $p_2$  der auf die Zwischenknoten wirkenden Ersatzlasten zusammengefasst werden, folgt das in Gl.(4.36) angegebene Gleichungssystem:

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} \quad (4.36)$$

Für die Verschiebungen des Plattenrandes wurden im VR-Element lineare Verschiebungsansätze gewählt (vgl. Anhang B). Da der Plattenrand nicht Teil des VR-Elements ist und die benachbarten Zwischenknoten am Plattenrand somit untereinander nicht direkt gekoppelt sind, müssen die linearen Abhängigkeiten der Verschiebungen der Zwischenknoten von den Verschiebungen der ursprünglichen Elementknoten A und B durch Nebenbedingungen in der elementinternen



die unabhängigen Steifigkeiten, Verschiebungen und Ersatzlasten kondensiert werden:

$$\mathbf{K}_{11}\mathbf{v}_1 + \mathbf{K}_{12}\mathbf{v}_2 = \mathbf{p}_1 \quad (4.39)$$

$$\mathbf{K}_{21}\mathbf{v}_1 + \mathbf{K}_{22}\mathbf{v}_2 = \mathbf{p}_2 \quad (4.40)$$

Aus Gl.(4.40) folgt:

$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{K}_{22}^{-1}(\mathbf{p}_2 - \mathbf{K}_{21}\mathbf{v}_1) \quad (4.41)$$

Einsetzen von Gl.(4.41) in Gl.(4.39) und Umformen liefert die reduzierte 10x10-Elementsteifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}_{\text{VR,red}}$  und den reduzierten Ersatzlastvektor  $\mathbf{p}_{\text{red}}$  der unabhängigen Freiheitsgrade  $\mathbf{v}_1$ :

$$\underbrace{(\mathbf{K}_{11} - \mathbf{K}_{12}\mathbf{K}_{22}^{-1}\mathbf{K}_{21})}_{\mathbf{K}_{\text{VR,red}}}\mathbf{v}_1 + \underbrace{(\mathbf{p}_1 - \mathbf{K}_{12}\mathbf{K}_{22}^{-1}\mathbf{p}_2)}_{\mathbf{p}_{\text{red}}} = 0 \quad (4.42)$$

Die vor Erreichen des elastischen Grenzzustandes des VR-Elements vorhandene Elementsteifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}_{\text{VR}}$  wird im teil- oder vollplastischen Zustand des VR-Elements durch die Elementsteifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}_{\text{VR,red}}$  ersetzt, welche die Steifigkeiten der plastischen Verbundbereiche nicht mehr enthält. Diese Steifigkeiten werden durch den reduzierten Ersatzlastvektor  $\mathbf{p}_{\text{red}}$  ersetzt, dessen Einträge als Ersatzlastgruppe sowohl auf die Rippenknoten C und D als auch auf die Plattenrandknoten A und B des Elements angesetzt werden.

#### 4.4.5 Ersatzlasten des VR-Elements

Wie in Abschnitt 4.4.4 bereits beschrieben wurde, werden die Verbundbeanspruchungen  $s_0$  und  $s_{90}$  im plastischen Zustand des Verbundes nicht mehr durch die Federsteifigkeit  $k$  des Verbundes und dessen Verschiebung bestimmt, sondern als Ersatzlastgruppe direkt auf die Bereichsknoten aufgebracht.

Ausgehend vom Mittelwert der Relativverschiebungen zwischen der Rippe und dem Plattenrand eines plastischen Bereichs, die in Bild 4-8 beispielhaft für den plastischen Bereich aus Bild 4-6b dargestellt ist, sind die Beanspruchungskomponenten  $s_0$  parallel und  $s_{90}$  senkrecht zur Rippenachse bzw. zum Plattenrand proportional zu den Verschiebungskomponenten  $u$  und  $w$ :

$$\frac{s_{\text{res,pl}}}{\sqrt{u^2 + w^2}} = \frac{s_0}{u} = \frac{s_{90}}{w} \quad (4.43)$$

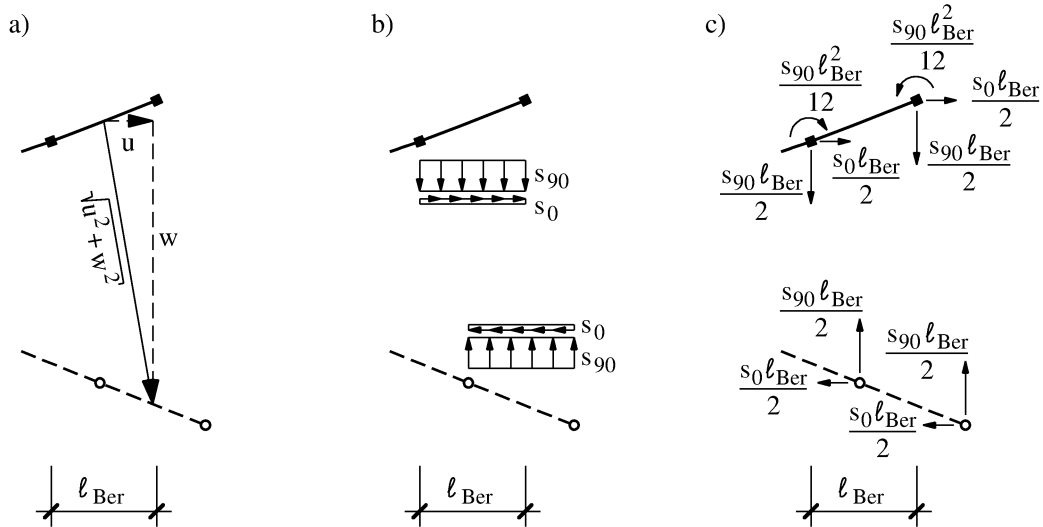


Da die plastische resultierende längenbezogene Verbundbeanspruchung  $s_{\text{res,pl}}$  die Beanspruchbarkeit  $R$  des einzelnen Verbindungsmittels bezogen auf den Verbindungsmittelabstand  $a_v$  ist, folgt für die über die Bereichslänge  $\ell_{\text{Ber}}$  konstant angenommenen Verbundbeanspruchungen  $s_0$  und  $s_{90}$  aus Gl.(4.43):

$$s_0 = \frac{R}{a_v} \frac{u}{\sqrt{u^2 + w^2}} \quad (4.44)$$

$$s_{90} = \frac{R}{a_v} \frac{w}{\sqrt{u^2 + w^2}} \quad (4.45)$$

Diese Verbundbeanspruchungen werden, wie in Bild 4-8b dargestellt, als Ersatzlastgruppe am plastischen Bereich angesetzt. Die dazu äquivalenten Knotenkräfte und -momente, die an den Bereichsknoten angreifen, sind in Bild 4-8c dargestellt. Die Bereichsknoten am Plattenrand erhalten keine Knotenmomente, da sie keine Verdrehungsfreiheitsgrade besitzen.



**Bild 4-8:** Plastischer Verbundbereich; a) mittlere Relativverschiebung zwischen Rippe und Plattenrand; b) Ersatzlastgruppe mit konstanten Linienlasten; c) Ersatzlastgruppe mit Knotenlasten

Die in Bild 4-8c dargestellte Ersatzlastgruppe wird für jeden plastischen Bereich eines VR-Elements im Elementersatzlastvektor  $p$  aufaddiert. Dieser wird in einen Vektor  $p_1$ , der den unabhängigen Freiheitsgraden zugeordnet werden kann, und einen Vektor  $p_2$ , dessen Lasten ausschließlich auf die Zwischenknoten wirken, aufgeteilt. Anschließend erfolgt mit Gl.(4.42) die statische Kondensation der Ersatzlastgruppen sämtlicher plastischer Bereiche des Elements zu einer Er-

satzlastgruppe, die in  $p_{\text{red}}$  gespeichert ist und die auf die Elementknoten A, B, C und D wirkt.

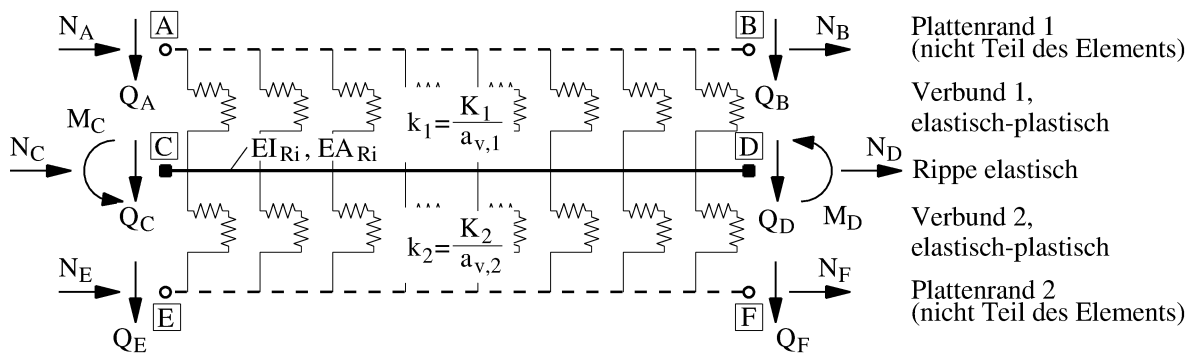
Die Ersatzlasten des VR-Elements wirken wie äußere Lasten auf das Gesamtsystem. Da sie jedoch stets als Ersatzlastgruppe mit gleich großen entgegengesetzten Anteilen auf die Elemente angesetzt werden, heben sie sich im Gesamtsystem gegenseitig auf und erzeugen keine zusätzlichen Auflagerreaktionen.

## 4.5 VRV-Element

### 4.5.1 Elementbeschreibung

Das VRV-Element besteht aus einer stabförmigen Rippe und deren Verbindung zu zwei starren Plattenrändern. Die Abkürzung „VRV“ steht für „Verbund-Rippe-Verbund“. Wie bei dem in Abschnitt 4.4 vorgestellten VR-Element sind auch hier die Plattenränder nicht Bestandteil des Elements. Sie werden im Gesamtgleichungssystem durch starr gekoppelte Knoten modelliert, an die das VRV-Element angeschlossen wird (Bild 4-9). Die beiden kontinuierlichen Verbunde zwischen der Rippe und den Plattenrändern werden als ideal-elastisch-plastisch angenommen (siehe Abschnitt 4.3) und können unterschiedliche Verbundsteifigkeiten  $k_1$  und  $k_2$  haben, die sich aus den Verschiebungsmoduln  $K_1$  bzw.  $K_2$  der einzelnen Verbindungsmittel und deren Verbindungsmittelabstand  $a_{v,1}$  bzw.  $a_{v,2}$  ergeben.

Das in Bild 4-9 dargestellte VRV-Element besitzt die vier Plattenrandknoten A, B, E und F sowie die beiden Rippenknoten C und D. Zwischen den Rippenknoten wird die Rippe durch einen Stab mit der Biegesteifigkeit  $EI_{Ri}$  und der Dehnsteifigkeit  $EA_{Ri}$  modelliert. Der Verbund 1 koppelt diesen Stab mit der Verbundsteifigkeit  $k_1$  an die Plattenrandknoten A und B, während der Verbund 2 mit der Verbundsteifigkeit  $k_2$  die Kopplung zu den Plattenrandknoten E und F bildet. Da die Rippe gegen beide Plattenränder gebettet ist, sind die Plattenränder indirekt miteinander gekoppelt. So ruft eine Verschiebung des einen Plattenrandes nicht nur Spannungen in der Rippe sondern auch Beanspruchungen in den Knoten des gegenüberliegenden Plattenrandes hervor.



**Bild 4-9:** VRV-Element zur Modellierung einer Rippe und ihrer Verbindung zu zwei starren Plattenrändern

Wie beim VR-Element besitzen die Rippenknoten C und D auch beim VRV-Element je drei Freiheitsgrade. Die vier Plattenrandknoten besitzen dagegen nur je zwei Freiheitsgrade. Insgesamt hat das VRV-Element somit 14 Freiheitsgrade. Die konjugierten Kraftgrößen sind in Bild 4-9 mit ihren gemäß der Vorzeichenkonvention des Weggrößenverfahrens positiven Wirkungsrichtungen dargestellt.

Aus Gründen der Übersichtlichkeit sind die im unverformten Element eigentlich koinzidenten Knoten A, C und E bzw. B, D und F in Bild 4-9 auseinander gezogen dargestellt.

#### 4.5.2 Formfunktionen des elastischen VRV-Elements

Analog zur Herleitung der Formfunktionen des VR-Elements in Abschnitt 4.4.2 können die Formfunktionen des VRV-Elements mit den Differentialgleichungen des parallel und senkrecht zur Stabachse elastisch gebetteten Stabes beschrieben werden. Voraussetzung dafür ist, dass keiner der beiden Verbunde seine Fließverschiebung  $u_y$  (vgl. Bild 3-8) überschreitet und dass die Berechnung nach Theorie I. Ordnung erfolgt.

Die 14 Formfunktionen des VRV-Elements sind in Bild 4-11 und Bild 4-12 dargestellt. Der erste Index jeder Funktion definiert, ob es sich um eine Verschiebung der Rippe („Ri“) oder um die Verschiebung eines der beiden Plattenränder („P1“ oder „P2“) handelt. Der zweite Index gibt die Ursache der Verschiebung an, die entweder eine Knotenverschiebung parallel („u“) oder senkrecht („w“) zur Rippenachse oder eine Knotenverdrehung („φ“) ist, während der dritte Index den Ort der Ursache angibt, der in einem der sechs Elementknoten liegt.

Der oben erwähnten Kopplung der Plattenränder über die Verbunde wird nun dadurch Rechnung getragen, dass der Verschiebungszustand des Elements aus einzelnen Verschiebungszuständen zusammengesetzt wird. Dies soll im Folgenden am Beispiel der Biegelinie  $w_{Ri,w,A}$  (s. Bild 4-11) der Rippe demonstriert werden, die infolge einer Einheitsverschiebung des Plattenrandknotens A senkrecht zur Rippenachse entsteht. Neben der Biegesteifigkeit  $EI_{Ri}$  der Rippe haben die beiden Verbunde mit ihren Verbundsteifigkeiten  $k_1$  und  $k_2$  Einfluss auf die Biegelinie der Rippe. Zunächst wird von einem theoretischen Verschiebungszustand ausgegangen, in dem die Plattenrandknoten A und E in entgegengesetzter Richtung so weit ausgelenkt werden, dass die Rippe spannungslos bleibt. Dieser Zustand ist in Bild 4-10a dargestellt. Die Verschiebungen  $w_1$  des Knotens A und  $w_2$  des Knotens E sind zunächst unbekannt. Zur Bestimmung von  $w_1$  und  $w_2$  benötigt man folgende Randbedingungen:

1. Bed.: Die Knoten A und E entfernen sich relativ um den Wert 1 voneinander:

$$w_1 + w_2 = 1 \quad (4.46)$$

2. Bed.: Die Verschiebungen der Verbunde sind so groß, dass die Summe der angreifenden Federkräfte in jedem Punkt der Rippe Null ist:

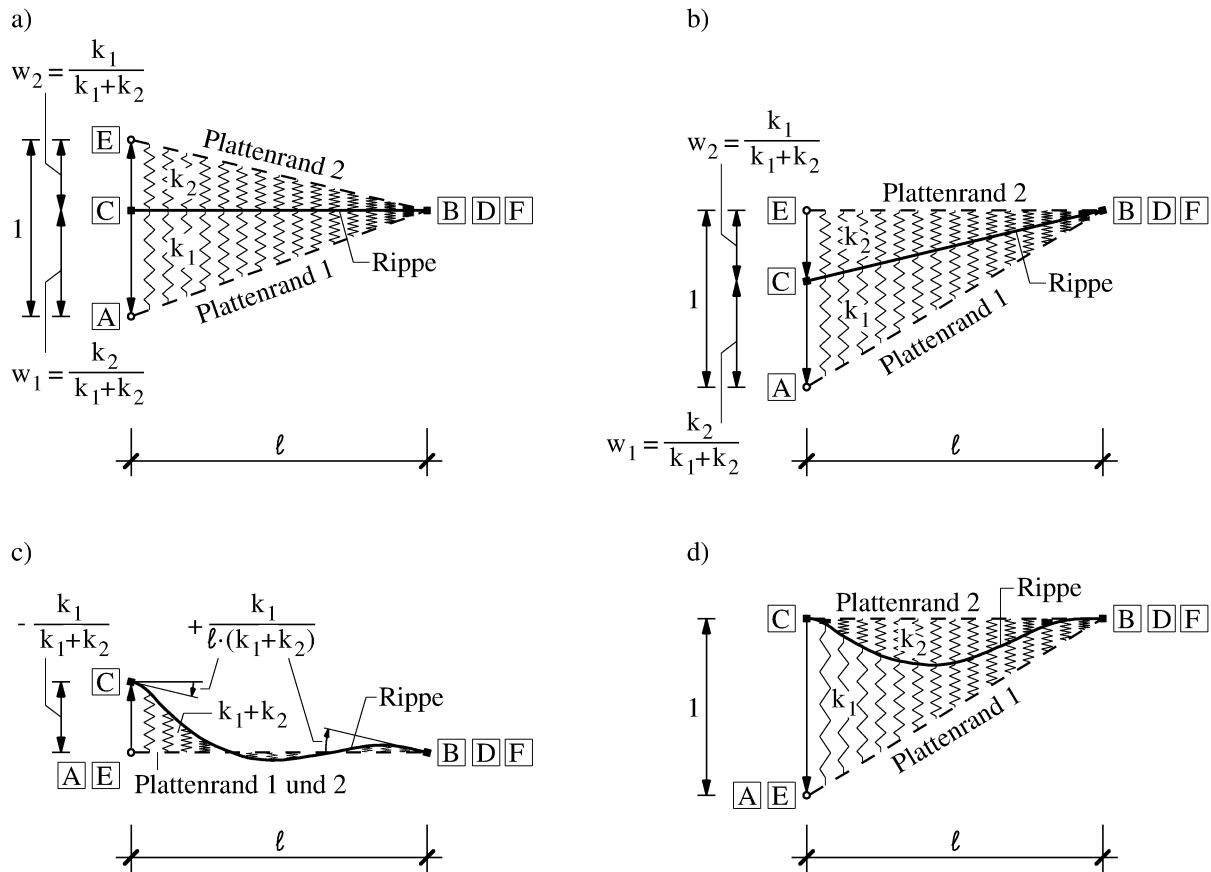
$$k_1 \cdot w_1 = k_2 \cdot w_2 \quad \Rightarrow \quad w_2 = \frac{k_1}{k_2} \cdot w_1 \quad (4.47)$$

Durch Einsetzen von Gl.(4.47) in Gl.(4.46) erhält man die Auslenkung  $w_1$ , die nur von den Steifigkeiten  $k_1$  und  $k_2$  der Verbunde abhängt:

$$w_1 = \frac{k_2}{k_1 + k_2} \quad (4.48)$$

Auswerten der Gl.(4.46) mit  $w_1$  aus Gl.(4.48) liefert die Auslenkung  $w_2$ :

$$w_2 = \frac{k_1}{k_1 + k_2} \quad (4.49)$$



**Bild 4-10:** Superposition von Verschiebungszuständen im VRV-Element

Für kleine Verdrehungen lässt sich der Verschiebungszustand in Bild 4-10a auch durch den Verschiebungszustand in Bild 4-10b darstellen. Letzterer beinhaltet die Verschiebung der Rippe für den Fall, dass der Plattenrandknoten A um eins verschoben ist, ohne dass der Rippenknoten C festgehalten ist. Wenn sich die Rippenknoten C und D – wie in Bild 4-10b angenommen – frei drehen können, bleibt die Rippe in diesem Zustand spannungslos. Folglich sind die Querkraft und das Biegemoment in jedem Punkt der Rippe Null. Die Rippe befindet sich quasi im „Schwebezustand“ zwischen den beiden Verbunden. Die Verschiebung der Rippe kann in diesem Zustand mit folgender Geradengleichung beschrieben werden:

$$w_{\text{Gerade}} = -\frac{k_1}{\ell \cdot (k_1 + k_2)} \cdot x + \frac{k_1}{k_1 + k_2} = \frac{k_1(\ell - x)}{\ell(k_1 + k_2)} \quad (4.50)$$

Die Rippe hat somit in jedem Punkt die Verdrehung

$$w'_{\text{Gerade}} = -\frac{k_1}{\ell \cdot (k_1 + k_2)} \quad (4.51)$$

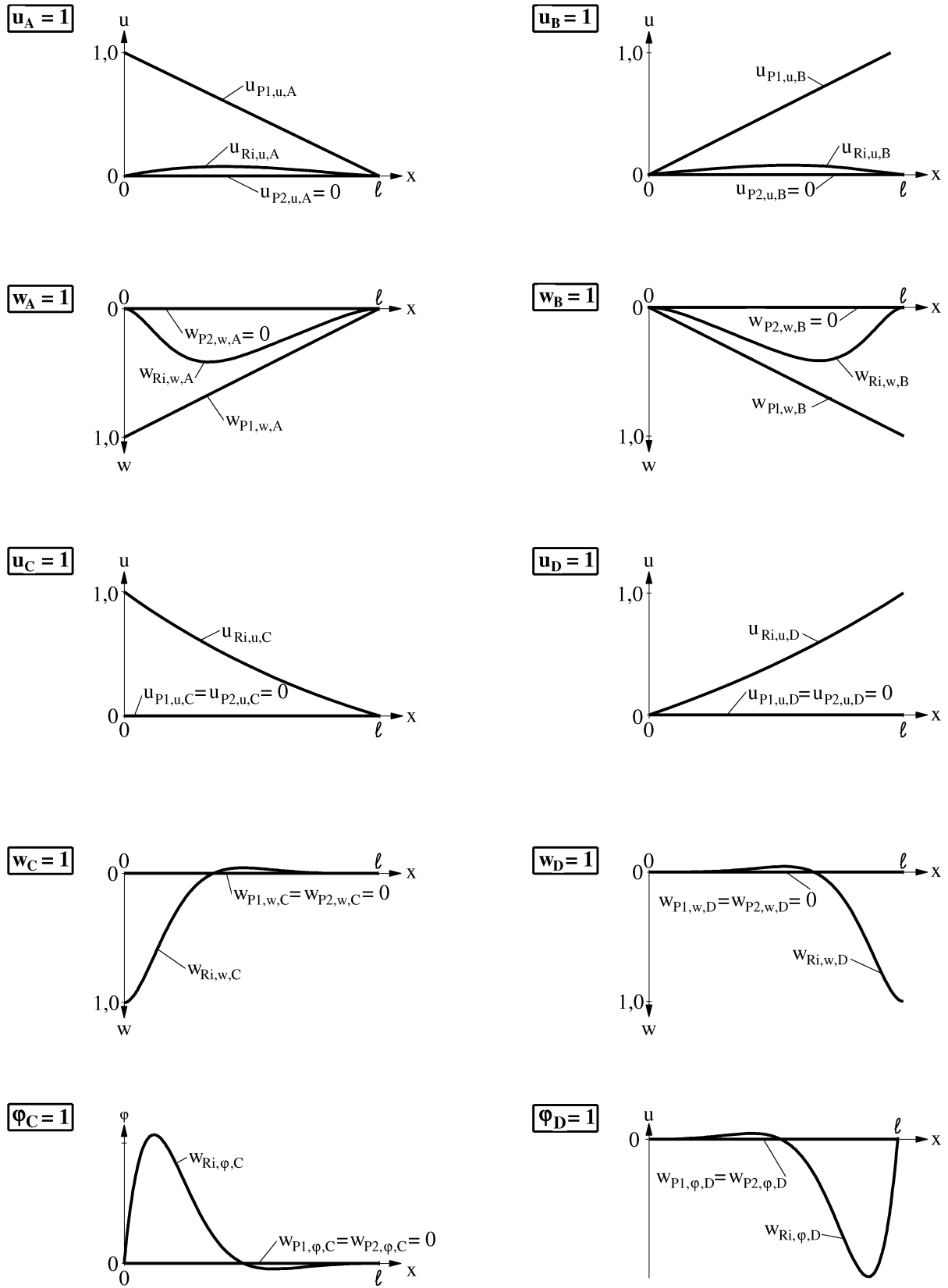
Der Zustand in Bild 4-10b ist nun mit einem weiteren Verschiebungszustand so zu superponieren, dass die Verschiebungen und Verdrehungen in den Rippenknoten C und D zu Null werden. Jede zusätzlich auf den Zustand in Bild 4-10b aufgebrauchte Verschiebung bzw. Verdrehung der Rippenknoten entspricht einer Verschiebung bzw. Verdrehung der Stabknoten eines elastisch gebetteten Balkens, dessen Bettungssteifigkeit  $k_1+k_2$  beträgt. Folglich erhält man die Funktion  $w_{\text{geb.Balken}}$  der Biegelinie des weiteren Zustandes, der in Bild 4-10c dargestellt ist und mit dem der Zustand in Bild 4-10b überlagert wird, durch die Auswertung der Lösung (Gl.(4.5)) der Differentialgleichung des gebetteten Balkens mit folgenden Randbedingungen:

$$\begin{aligned} w_C &= -\frac{k_1}{k_1 + k_2} \\ \varphi_C = \varphi_D &= \frac{k_1}{\ell(k_1 + k_2)} \end{aligned} \quad (4.52)$$

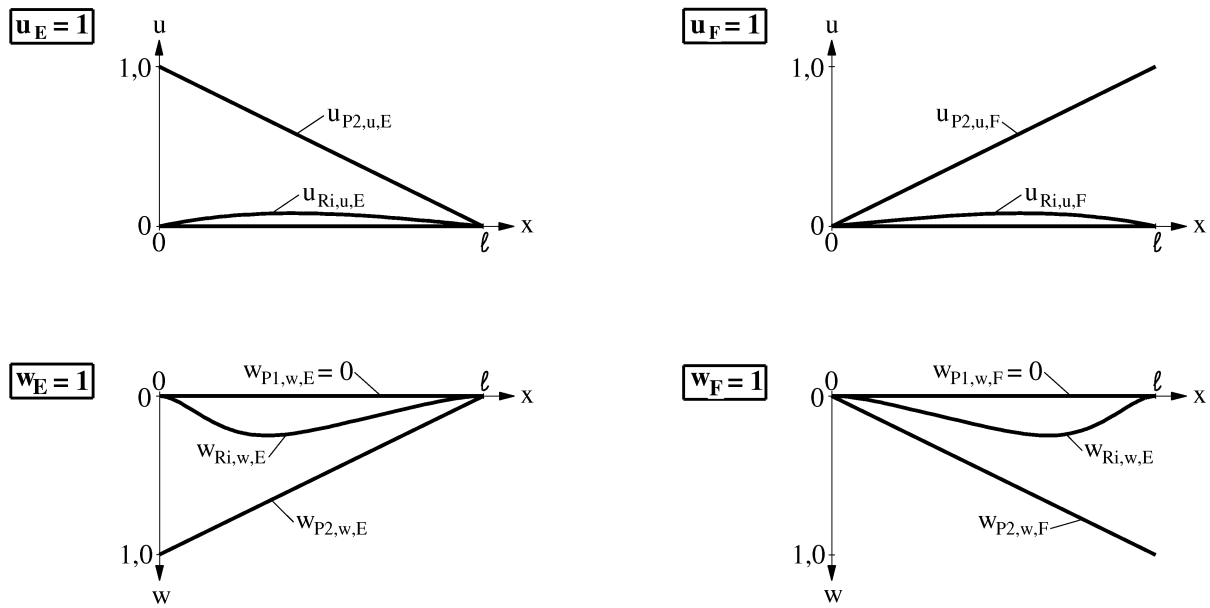
Auf die Darstellung der Funktion  $w_{\text{geb.Balken}}$  wird an dieser Stelle verzichtet, da diese sehr länglich ist. Die Formfunktion der gesuchten Biegelinie  $w_{\text{Ri,w,A}}$ , die aus der Einheitsverschiebung des Knotens A resultiert, folgt schließlich aus der Superposition

$$w_{\text{Ri,w,A}} = w_{\text{Gerade}} + w_{\text{geb.Balken}} \quad (4.53)$$

Die Formfunktion  $w_{\text{Ri,w,A}}$  ist neben den anderen Formfunktionen aus Bild 4-11 und Bild 4-12 im Anhang A dargestellt.



**Bild 4-11:** Einheitsverformungszustände der Knoten A, B, C und D im VRV-Element



**Bild 4-12:** Einheitsverformungszustände der Knoten E und F im VRV-Element

### 4.5.3 Steifigkeitsmatrix des elastischen VRV-Elements

Die Arbeitsgleichung des VRV-Elements entspricht der in Abschnitt 4.4.3 angeführten Arbeitsgleichung Gl.(4.20) des VR-Elements.

$$-\delta A_{\text{el.}} = \int u' EA \delta u' dx + \int u_v k \delta u dx + \int w'' EI \delta w'' dx + \int w_v k \delta w dx \quad (4.54)$$

Allerdings beschreiben  $\delta u$  und  $\delta w$  hier neben den virtuellen Verschiebungen der Rippe auch die virtuellen Verschiebungen beider Plattenränder. Die wirklichen Verschiebungen beider Verbunde, die aus Relativverschiebungen der Rippe gegenüber den beiden Plattenrändern oder auch durch Relativverschiebungen der Plattenränder zueinander entstehen, werden durch  $u_v$  und  $w_v$  ausgedrückt. Die Steifigkeitsmatrix  $K_{\text{VRV}}$  des VRV-Elements kann durch die analytische Integration der nachfolgend in Matrizenschreibweise dargestellten Produkte aus den in Bild 4-11 und Bild 4-12 und im Anhang A dargestellten Formfunktionen und den Steifigkeiten der Rippe und der Verbunde berechnet werden. Die Abhängigkeiten zwischen den Verbunden und der Rippe werden deutlich, wenn die Steifigkeitsmatrix  $K_{\text{VRV}}$  in neun Untermatrizen gegliedert wird:

$$K_{\text{VR}} = \begin{bmatrix} K_{P1} & K_{Ri-P1} & K_{P2-P1} \\ K_{P1-Ri} & K_{Ri} & K_{P2-Ri} \\ K_{P1-P2} & K_{Ri-P2} & K_{P2} \end{bmatrix}. \quad (4.55)$$

Die Einträge der Untermatrix  $K_{P1}$  beschreiben die Knotenkräfte, die infolge der wirklichen Verschiebungen des Verbundes 1 an den Plattenrandknoten A und B



entstehen und die auf den konjugierten virtuellen Verschiebungen des Plattenrandes 1 Arbeit leisten.

$$\delta v_{PR1} = \begin{pmatrix} \delta u_{P1,u,A} & 0 & \delta u_{P1,u,B} & 0 \\ 0 & \delta w_{P1,w,A} & 0 & \delta w_{P1,w,B} \end{pmatrix} \quad (4.56)$$

$$v_{VB1} = \begin{pmatrix} u_{P1,u,A} - u_{Ri,u,A} & 0 & u_{P1,u,B} - u_{Ri,u,B} & 0 \\ 0 & w_{P1,w,A} - w_{Ri,w,A} & 0 & w_{P1,w,B} - w_{Ri,w,B} \end{pmatrix} \quad (4.57)$$

$$K_{P1} = \int_0^l k_1 \delta v_{PR1}^T v_{VB1} dx \quad (4.58)$$

Entsprechend können die Einträge der Untermatrix  $K_{P2}$  als die Knotenkräfte gedeutet werden, die infolge der wirklichen Verschiebungen des Verbundes 2 an den Plattenrandknoten E und F entstehen und die auf den virtuellen Verschiebungen des Plattenrandes 2 Arbeit leisten.

$$\delta v_{PR2} = \begin{pmatrix} \delta u_{P2,u,E} & 0 & \delta u_{P2,u,F} & 0 \\ 0 & \delta w_{P2,w,E} & 0 & \delta w_{P2,w,F} \end{pmatrix} \quad (4.59)$$

$$v_{VB2} = \begin{pmatrix} u_{P2,u,E} - u_{Ri,u,E} & 0 & u_{P2,u,F} - u_{Ri,u,F} & 0 \\ 0 & w_{P2,w,E} - w_{Ri,w,E} & 0 & w_{P2,w,F} - w_{Ri,w,F} \end{pmatrix} \quad (4.60)$$

$$K_{P2} = \int_0^l k_2 \delta v_{PR2}^T v_{VB2} dx \quad (4.61)$$

Die Abhängigkeiten zwischen den wirklichen Verschiebungen der Rippe und den virtuellen Verschiebungen des Plattenrandes 1 sind in der Untermatrix  $K_{Ri-P1}$  enthalten. Das negative Vorzeichen des Arbeitsterms ist den gegensätzlichen Wirkungsrichtungen der wirklichen und der virtuellen Verschiebungen geschuldet.

$$v_{Ri} = \begin{pmatrix} u_{Ri,u,C} & 0 & 0 & u_{Ri,u,D} & 0 & 0 \\ 0 & w_{Ri,w,C} & w_{Ri,\varphi,C} & 0 & w_{Ri,w,D} & w_{Ri,\varphi,D} \end{pmatrix} \quad (4.62)$$

$$K_{Ri-P1} = - \int_0^l k_1 \delta v_{PR1}^T v_{Ri} dx \quad (4.63)$$

Analog dazu enthält die Untermatrix  $K_{Ri-P2}$  die Abhängigkeiten zwischen den wirklichen Verschiebungen der Rippe und den virtuellen Verschiebungen des Plattenrandes 2:

$$K_{Ri-P2} = - \int_0^l k_2 \delta v_{PR2}^T v_{Ri} dx \quad (4.64)$$

Die Arbeiten, die die Verbundkräfte des einen Plattenrandes auf den virtuellen Verschiebungen des anderen Plattenrandes leisten, sind in den Untermatrizen  $K_{P2-P1}$  bzw.  $K_{P1-P2}$  enthalten.

$$K_{P2-P1} = - \int_0^l k_1 \delta v_{PR1}^T v_{PR2} dx \quad (4.65)$$

$$K_{P1-P2} = - \int_0^l k_2 \delta v_{PR2}^T v_{PR1} dx \quad (4.66)$$

Die Untermatrizen  $K_{P1-Ri}$  und  $K_{P2-Ri}$  setzen sich analog zur Untermatrix  $K_{Pl-Ri}$  des VR-Elements aus je drei Anteilen zusammen, die die Arbeit der Verbundkräfte, der Normalkräfte und der Biegemomente enthalten.

$$\delta v_{Ri} = \begin{pmatrix} \delta u_{Ri,u,C} & 0 & 0 & \delta u_{Ri,u,D} & 0 & 0 \\ 0 & \delta w_{Ri,w,C} & \delta w_{Ri,\varphi,C} & 0 & \delta w_{Ri,w,D} & \delta w_{Ri,\varphi,D} \end{pmatrix} \quad (4.67)$$

$$\delta u'_{Ri} = \begin{pmatrix} \delta u'_{Ri,u,C} & 0 & 0 & \delta u'_{Ri,u,D} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.68)$$

$$\delta w''_{Ri} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \delta w''_{Ri,w,C} & \delta w''_{Ri,\varphi,C} & 0 & \delta w''_{Ri,w,D} & \delta w''_{Ri,\varphi,D} \end{pmatrix} \quad (4.69)$$

$$u'_{VB1} = \begin{pmatrix} u'_{P1,u,A} - u'_{Ri,u,A} & 0 & u'_{P1,u,B} - u'_{Ri,u,B} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.70)$$

$$u'_{VB2} = \begin{pmatrix} u'_{P2,u,E} - u'_{Ri,u,E} & 0 & u'_{P2,u,F} - u'_{Ri,u,F} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.71)$$

$$w''_{VB1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & w''_{P1,w,A} - w''_{Ri,w,A} & 0 & w''_{P1,w,B} - w''_{Ri,w,B} \end{pmatrix} \quad (4.72)$$

$$w''_{VB2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & w''_{P2,w,E} - w''_{Ri,w,E} & 0 & w''_{P2,w,F} - w''_{Ri,w,F} \end{pmatrix} \quad (4.73)$$

$$K_{P1-Ri} = - \int_0^l k_1 \delta v_{Ri}^T v_{VB1} dx - \int_0^l EA \delta u'_{Ri}^T u'_{VB1} dx - \int_0^l EI \delta w''_{Ri}^T w''_{VB1} dx \quad (4.74)$$

$$K_{P2-Ri} = - \int_0^l k_2 \delta v_{Ri}^T v_{VB2} dx - \int_0^l EA \delta u'_{Ri}^T u'_{VB2} dx - \int_0^l EI \delta w''_{Ri}^T w''_{VB2} dx \quad (4.75)$$

Die Untermatrix  $K_{Ri}$  des VRV-Elements entspricht der Untermatrix  $K_{Ri}$  des VR-Elements mit dem Unterschied, dass sich die Verbundsteifigkeit aus den Steifigkeiten  $k_1$  und  $k_2$  beider Verbunde zusammensetzt.

$$u'_{Ri} = \begin{pmatrix} u'_{Ri,u,C} & 0 & 0 & u'_{Ri,u,D} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.76)$$

$$w''_{Ri} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & w''_{Ri,w,C} & w''_{Ri,\varphi,C} & 0 & w''_{Ri,w,D} & w''_{Ri,\varphi,D} \end{pmatrix} \quad (4.77)$$

$$K_{Ri} = \int_0^l (k_1 + k_2) \delta v_{Ri}^T v_{Ri} dx + \int_0^l EA \delta u'_{Ri}^T u'_{Ri} dx + \int_0^l EI \delta w''_{Ri}^T w''_{Ri} dx \quad (4.78)$$

#### 4.5.4 Steifigkeitsmatrix des VRV-Elements mit teil- oder vollplastischem Verbund

Die in Abschnitt 4.4.4 beschriebene Vorgehensweise zur Modellierung plastischer Verbundbereiche innerhalb eines VR-Elements gilt für das VRV-Element sinngemäß. Im Unterschied zum VR-Element ist jedoch in einem plastischen

Bereich des VRV-Elements zu unterscheiden, ob der Verbund 1 oder der Verbund 2 plastisch ist oder ob beide Verbunde fließen (vgl. Bild 4-9).

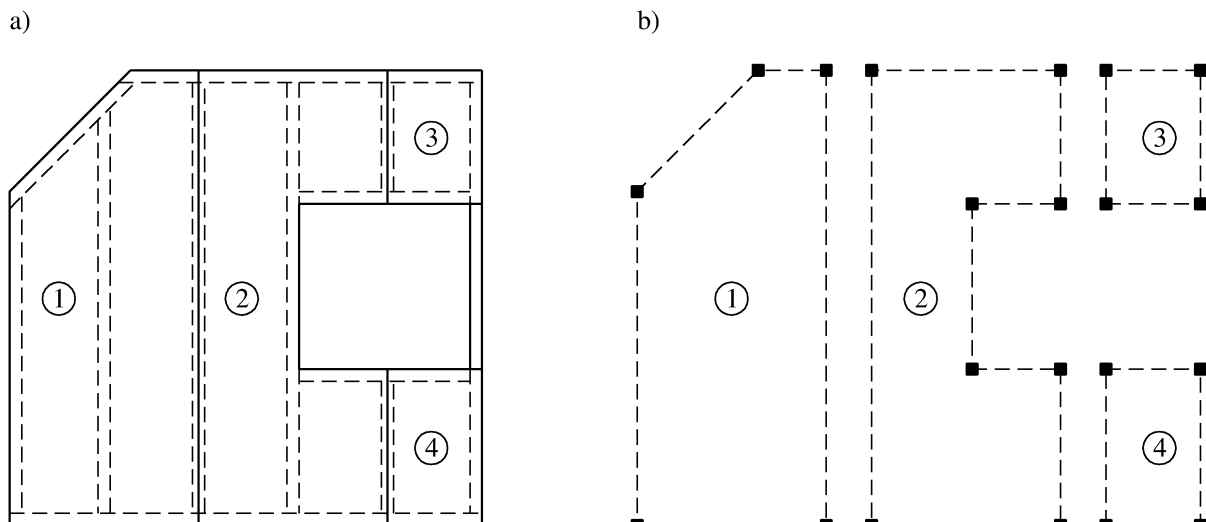
Nach der statischen Kondensation sämtlicher elastischer und plastischer Bereiche mit Gl.(4.42) erhält man die 14x14-Steifigkeitsmatrix  $K_{VRV,red}$ , welche die vor Erreichen der elastischen Grenzlaster vorhandene Elementsteifigkeitsmatrix  $K_{VRV}$  ersetzt.

#### 4.5.5 Ersatzlasten des VRV-Elements

Für jeden plastischen Verbund innerhalb eines Bereichs des VRV-Elements wird eine Ersatzlastgruppe angesetzt, deren Lasten nach Gl.(4.44), Gl.(4.45) und Bild 4-8 bestimmt werden können. Die Ersatzlastgruppen der Bereiche werden mittels statischer Kondensation zu einer Ersatzlastgruppe zusammengefasst und auf das VRV-Element aufgebracht.

### 4.6 Modellierung der Beplankung

Die Beplankung einer Holztafel besteht i. d. R. aus einzelnen Holzwerkstoff- oder Gipswerkstoffplatten, die über stabförmige Verbindungsmittel mit den Rippen verbunden sind. Im hier vorgestellten Stab-Verbund-Modell werden die einzelnen Platten als starre Körper implementiert, die ausschließlich durch ihre Eckknoten definiert sind, wie das Beispiel in Bild 4-13 zeigt.



a) Wandtafel mit schräger Berandung und Fensteröffnung

b) Modellierung der Beplankung durch die starre Kopplung (gestrichelt) der Eckknoten jeder Platte

**Bild 4-13:** Beschreibung der Beplankungselemente durch die starre Kopplung ihrer Eckknoten

Die Annahme starrer Platten in der Beplankung ist dadurch gerechtfertigt, dass die Verformungen der Beplankung im Allgemeinen nur einen geringen Anteil an den Gesamtverformungen der Tafel haben, wie Dettmann in [5] anhand der Formänderungsenergie von Tafелеlementen zeigt.

In die Steifigkeitsmatrix des Gesamtsystems werden die starren Kopplungen der Plattenknoten in Form von Nebenbedingungen eingebaut. Dabei werden jeweils zwei Knoten starr miteinander gekoppelt. Wird z. B. der Knoten 1 einer Platte mit dem Knoten 2 gekoppelt, so sind folgende Koppelbedingungen zu berücksichtigen:

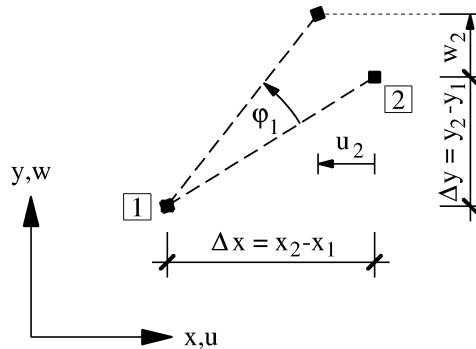
Im globalen Koordinatensystem führt eine Verschiebung  $u_1$  des Knotens 1 in x-Richtung zwangsläufig zu einer gleich großen Verschiebung  $u_2$  des Knotens 2:

$$u_1 = u_2 \Rightarrow u_1 - u_2 = 0 \quad (4.79)$$

Selbiges gilt für die Verschiebungen  $w$  in y-Richtung:

$$w_1 = w_2 \Rightarrow w_1 - w_2 = 0 \quad (4.80)$$

Eine Verdrehung  $\varphi_1$  des Knotens 1 führt nicht nur zu einer gleich großen Verdrehung  $\varphi_2$  des Knotens 2, sondern auch zu einer Verschiebung des Knotens 2, wie in Bild 4-14 dargestellt.



**Bild 4-14:** Verschiebungen des Knotens 2 infolge einer Verdrehung des starr gekoppelten Knotens 1

Letztere lässt sich in Richtung der globalen Koordinatenachsen in zwei Verschiebungsanteile  $u_2$  und  $w_2$  aufteilen, die unabhängig voneinander betrachtet werden können, wenn unter der Annahme kleiner Drehwinkel

$$\sin \varphi \approx \varphi \text{ und } \cos \varphi \approx 1 \quad (4.81)$$

sind. Somit können die Verschiebungen  $u_2$  und  $w_2$  des Knotens 2 durch die Verschiebungen  $u_1$  und  $w_1$  des Knotens 1 und die in beiden Knoten gleiche Verdrehung  $\varphi$  ausgedrückt werden:

$$u_2 = u_1 - \Delta y \cdot \varphi = u_1 - (y_2 - y_1) \cdot \varphi \quad (4.82)$$

$$w_2 = w_1 + \Delta x \cdot \varphi = w_1 + (x_2 - x_1) \cdot \varphi \quad (4.83)$$

Mit der Bedingung

$$\varphi = \varphi_1 = \varphi_2 \quad (4.84)$$

lassen sich die Gleichungen (4.82) und (4.83) wie folgt umschreiben:

$$u_1 + y_1 \cdot \varphi_1 - u_2 - y_2 \cdot \varphi_2 = 0 \quad (4.85)$$

$$w_1 - x_1 \cdot \varphi_1 - w_2 + x_2 \cdot \varphi_2 = 0 \quad (4.86)$$

Die Nebenbedingungen in den Gleichungen (4.84) bis (4.86) werden in Matrix-Vektor-Schreibweise gebracht:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & y_1 & -1 & 0 & -y_2 \\ 0 & 1 & -x_1 & 0 & -1 & x_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ w_1 \\ \varphi_1 \\ u_2 \\ w_2 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.87)$$

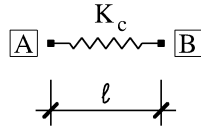
Für jede starre Kopplung zwischen zwei Knoten wird die Steifigkeitsmatrix des Gesamtsystems um drei Zeilen erweitert, in welche die in Gl. (4.87) links dargestellte Matrix, die nur Einsen und die Abstände der Knoten vom globalen Koordinatenursprung enthält, den Knotenweggrößen entsprechend einsortiert wird. Um die Symmetrie der Steifigkeitsmatrix des Gesamtsystems zu erhalten, wird sie entsprechend um drei Spalten erweitert, in welche die Transponierte der Matrix aus Gl. (4.87) eingetragen wird. So erfordert z. B. die Modellierung der Platte 1 in Bild 4-13 zwölf zusätzliche Zeilen und zwölf zusätzliche Spalten in der Steifigkeitsmatrix des Gesamtsystems. Mit jeder starren Kopplung zwischen zwei Knoten wird jedoch nicht nur die Steifigkeitsmatrix des Gesamtsystems sondern auch der Freiwertevektor um drei Zeilen erweitert. Diese zusätzlichen Freiwerte besitzen keine physikalische Bedeutung, jedoch wäre das Gleichungssystem ohne sie nicht lösbar. Bei der programmtechnischen Umsetzung erweist

es sich als vorteilhaft, für jede Platte einen Referenzknoten zu wählen, mit dem jeder weitere Plattenknoten gekoppelt wird, so dass alle Plattenknoten indirekt über den Referenzknoten miteinander gekoppelt sind. Dadurch wird die Steifigkeitsmatrix nicht singulär.

## 4.7 Druckkontakt zwischen den Rippen

Wird eine Holztafel durch Lasten beansprucht, die parallel zur Tafelebene wirken, so verschieben sich die Rippen innerhalb der Ebene gegeneinander. Dabei entstehen ggf. Kontakte zwischen den Rippen, über die Kräfte von einer Rippe zur anderen übertragen werden. Die Brüstungsrippe an der Fensteröffnung einer Wandtafel gibt beispielsweise ihre Längskraft über Druckkontakt an die vertikale Rippe neben der Fensteröffnung weiter. Die vertikale Rippe trägt diese Kraft einerseits über Biegung andererseits über ihre Bettung auf den Verbindungsmitteln ab, wie die Verformungsfigur der Wandtafel in Bild 1-3 zeigt.

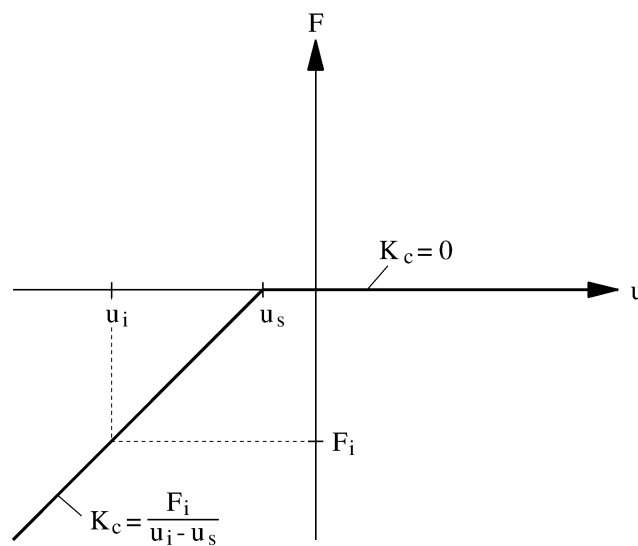
In dem hier vorgestellten Stab-Verbund-Modell wird der Druckkontakt zwischen den Rippen mit einfachen eindimensionalen Federelementen simuliert.



**Bild 4-15:** Federelement zur Modellierung des Druckkontaktes zwischen zwei Knoten

Dies sind 2-Knoten-Elemente, die zwischen den in Kontakt tretenden Rippenknoten angeordnet werden und die nur dann eine Drucksteifigkeit  $K_c$  besitzen, wenn diese einer Durchdringung der Rippenelemente entgegenwirkt. Die Freiheitsgrade des Elements sind die Verschiebungen  $u_A$  und  $u_B$  der Elementknoten. Das vereinfachte Kraft-Verschiebungs-Diagramm dieses Kontaktelements ist in Bild 4-16 dargestellt.

Darin beschreibt  $u_s$  die Verschiebung, bei der die Drucksteifigkeit  $K_c$  von Null auf einen Wert springt, der u. a. von der Querdrucksteifigkeit des Holzes und der Größe der Kontaktfläche abhängt. Die Verschiebung zwischen der koinzidenten Ausgangslage der Knoten und dem Erreichen von  $u_s$  kann als „Schlupf“ des Kontaktstoßes bezeichnet werden und kommt dadurch zustande, dass die Kontaktflächen der Rippen infolge von Fertigungstoleranzen im unbeanspruchten Zustand der Tafel nicht plan aufeinander liegen.



**Bild 4-16:** Kraft-Verschiebungs-Diagramm des Druckkontaktelements

Ein typisches Beispiel für eine solche Fertigungstoleranz zeigt Bild 4-17. Folglich müssen sich die Rippen im Modell um das Maß  $u_s$  aufeinander zu bewegen, bevor der Kontaktstoß Kräfte überträgt. Ob der Ansatz eines Schlupfes bei der Modellierung einer Holztafel sinnvoll ist, hängt u. a. davon ab, ob die Größe des Schlupfes realitätsnah abgeschätzt werden kann. Andernfalls könnte entweder auf die Modellierung des Schlupfes verzichtet werden oder die Modellierung des Kontaktes zwischen den Rippen könnte gänzlich entfallen.



**Bild 4-17:** Durch Fertigungstoleranzen bedingte Fuge zwischen der vertikalen Randrippe und der Fußrippe einer Wandtafel

Wie bei den in den Abschnitten 4.4 und 4.5 beschriebenen Rippenelementen setzt auch die Implementierung des Druckkontaktelements in das Gesamtsystem eine schrittweise Steigerung der äußeren Last mit einhergehender Änderung der

Elementsteifigkeiten voraus, da die Aktivierung des Druckkontaktes vom Verschiebungszustand des Elements abhängt.

Die Steifigkeitsmatrix  $K_{DK}$  des Druckkontaktelements, dessen Drucksteifigkeit  $K_c$  aktiviert ist, ist in Gl.(4.88) dargestellt. Sie entspricht der Steifigkeitsmatrix eines linearen Federelements, das u. a. in [38] beschrieben ist.

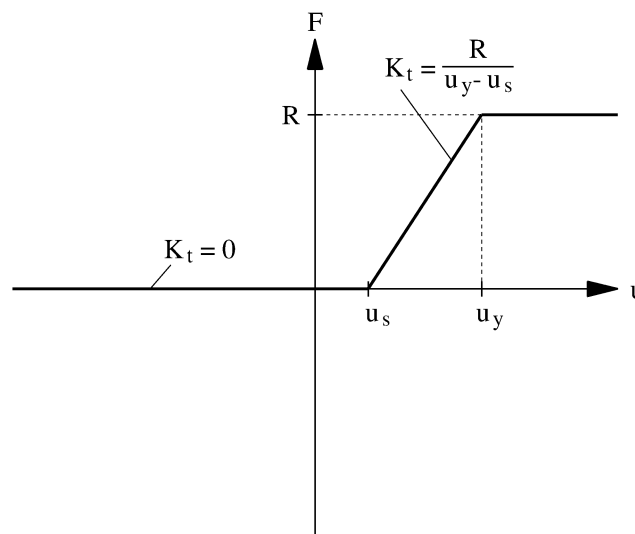
$$K_{DK} = K_c \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.88)$$

## 4.8 Druckkontakt zwischen den Platten

Grundsätzlich kann das in Abschnitt 4.7 beschriebene Druckkontaktelement auch zur Modellierung eines Druckkontaktes zwischen zwei Platten dienen, um eine Durchdringung benachbarter Platten im Modell zu vermeiden. Dazu sind zwei Plattenknoten mit dem Element zu koppeln. Vor dem Hintergrund der als starr angenommenen Platten ist dann eine sehr hohe Federsteifigkeit für das Druckkontaktelement zweckmäßig.

## 4.9 Verankerung

Analog zum Druckkontaktelement kann die Zugverankerung ebenfalls durch ein einfaches Federelement modelliert werden, das zwischen einem starr gelagerten Auflagerknoten und dem Fußpunktknoten einer Rippe oder zwischen zwei Rippenknoten angeordnet wird.

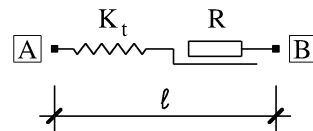


**Bild 4-18:** Kraft-Verschiebungs-Diagramm des Zugverankerungselements



Wenn sichergestellt ist, dass die Zugverankerung im realen Tragwerk nicht spröde versagt, sondern ein dukiles Kraft-Verschiebungs-Verhalten aufweist, kann dem Element vereinfachend das in Bild 4-18 dargestellte ideal-elastisch-plastische Last-Verschiebungs-Diagramm zugewiesen werden, das auch die Modellierung eines Schlupfes  $u_s$  zulässt.

Zur Berücksichtigung des ideal-plastischen Verhaltens jenseits der Fließverschiebung  $u_y$  ist das Federelement anschaulich mit einem Reibungselement in Reihe zu schalten, wie in Bild 4-19 dargestellt. In der Literatur (z. B. in [34],[38]) wird das aus einer Hooke'schen Feder und einem St.-Venant-Reibungselement zusammengesetzte Element als „Prandtl-Element“ bezeichnet.



**Bild 4-19:** Prandtl-Element zur Modellierung eines ideal-elastisch-plastischen Verhaltens der Zugverankerung

Wird das Element so ausgelenkt, dass die Zugkraft nicht aktiviert wird, dann wird die Steifigkeit  $K_t$  der Feder im Modell gleich Null gesetzt (Bild 4-18). Ist die Auslenkung größer als der angesetzte Schlupf  $u_s$  und kleiner als die Fließverschiebung  $u_y$  der Zugverankerung, so kann das Zugankerelement mit der Steifigkeitsmatrix  $K_{ZA}$  in das Stab-Verbund-Modell implementiert werden.

$$K_{ZA} = K_t \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.89)$$

Die Federsteifigkeit  $K_t$  setzt sich dann aus den Verschiebungsmoduln der stabförmigen Verbindungsmittel, mit denen der Zuganker an die Rippe angeschlossen ist, der Dehnsteifigkeit der Stahlbleche, aus denen der Zuganker besteht, und ggf. der Nachgiebigkeit des Schwerlastdübels, mit dem der Zuganker in einer Stahlbetonplatte verankert ist, zusammen.

Die gesamte Zugverankerung verhält sich duktil, wenn sich die Nagel- bzw. Schraubverbindung zwischen Zugverankerung und Rippe duktil verhält. Dies ist dann der Fall, wenn die Verbindung so bemessen ist, dass sie ihre Fließgrenze vor einem spröden Versagen des Schwerlastdübels oder der Rippe erreicht. Vereinfacht entspricht die Beanspruchbarkeit der Zugverankerung dann der Beanspruchbarkeit  $R$  der Verbindung zwischen Zuganker und Rippe. Im Stab-Verbund-Modell wird die Steifigkeit  $K_t$  im plastischen Zustand der Zugveranke-

rung wieder zu Null gesetzt und stattdessen eine Ersatzlastgruppe angesetzt, welche die Funktion des Reibungselements übernimmt. Diese Ersatzlastgruppe besteht aus zwei Einzellasten der Größe  $R$ , die entgegengesetzt an den beiden Knoten des Zugankerelements angreifen. Dadurch wird das in Bild 4-18 dargestellte ideal-plastische Verhalten der Zugverankerung nach Erreichen der Fließverschiebung  $u_y$  im Stab-Verbund-Modell berücksichtigt.

#### 4.10 Programmablaufplan zur iterativen numerischen Berechnung des plastischen Grenzzustandes von Holztafelkonstruktionen

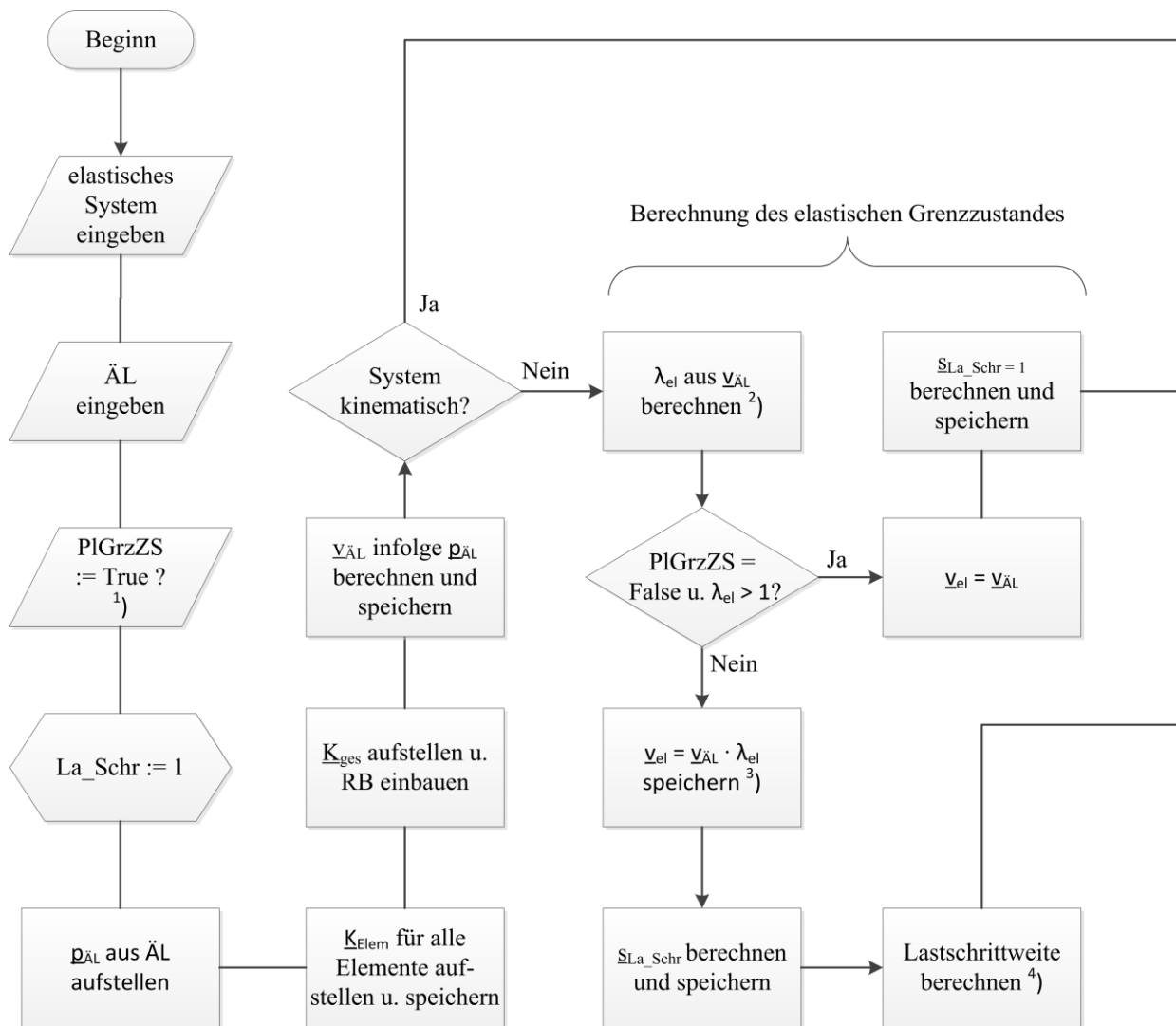
Der in Bild 4-20 dargestellte Programmablaufplan zeigt den grundsätzlichen Ablauf der Berechnung des elastischen und des plastischen Grenzzustandes eines Stab-Verbund-Modells für Holztafeln.

##### Legende zum Programmablaufplan in Bild 4-20:

- <sup>1)</sup> An dieser Stelle prüft das Programm, ob die Berechnung bei Erreichen der eingegebenen Lasten beendet wird, oder ob sie ggf. über den eingegebenen Lastzustand hinaus bis zum Erreichen des plastischen Grenzzustandes (PlGrzZS) weitergeführt wird.
- <sup>2)</sup> Aus den äußeren Lasten werden in jedem VR- bzw. VRV-Element zunächst die Relativverschiebungen  $\Delta v_{\ddot{A}L,i}$  zwischen Rippe und Platte an jeder Stelle  $i$  berechnet. Aus der kleinsten Relativverschiebung  $\Delta v_{\ddot{A}L,i,min}$  und der Fließverschiebung  $u_y$  kann der Lastfaktor  $\lambda_{el}$  des elastischen Grenzzustandes bestimmt werden:
 
$$\lambda_{el} = \frac{u_{pl}}{\Delta v_{\ddot{A}L,i,min}} \quad (4.90)$$
- <sup>3)</sup> Dies ist der elastische Grenzzustand, in dem das erste Verbindungsmittel innerhalb des gesamten Tafeltragwerks seine Fließgrenze erreicht.
- <sup>4)</sup> Lastschrittweite  $\Delta \lambda = \frac{1 - \lambda_{el}}{n}$ , mit  $n$  = gewünschte Anzahl der Lastschritte
- <sup>5)</sup> Der System-Ersatzlastvektor  $p_{EL}$  wird aus den einzelnen Element-Ersatzlastvektoren  $p_{Elem,EL}$  zusammengebaut. Die Bestimmung der vom Ver-

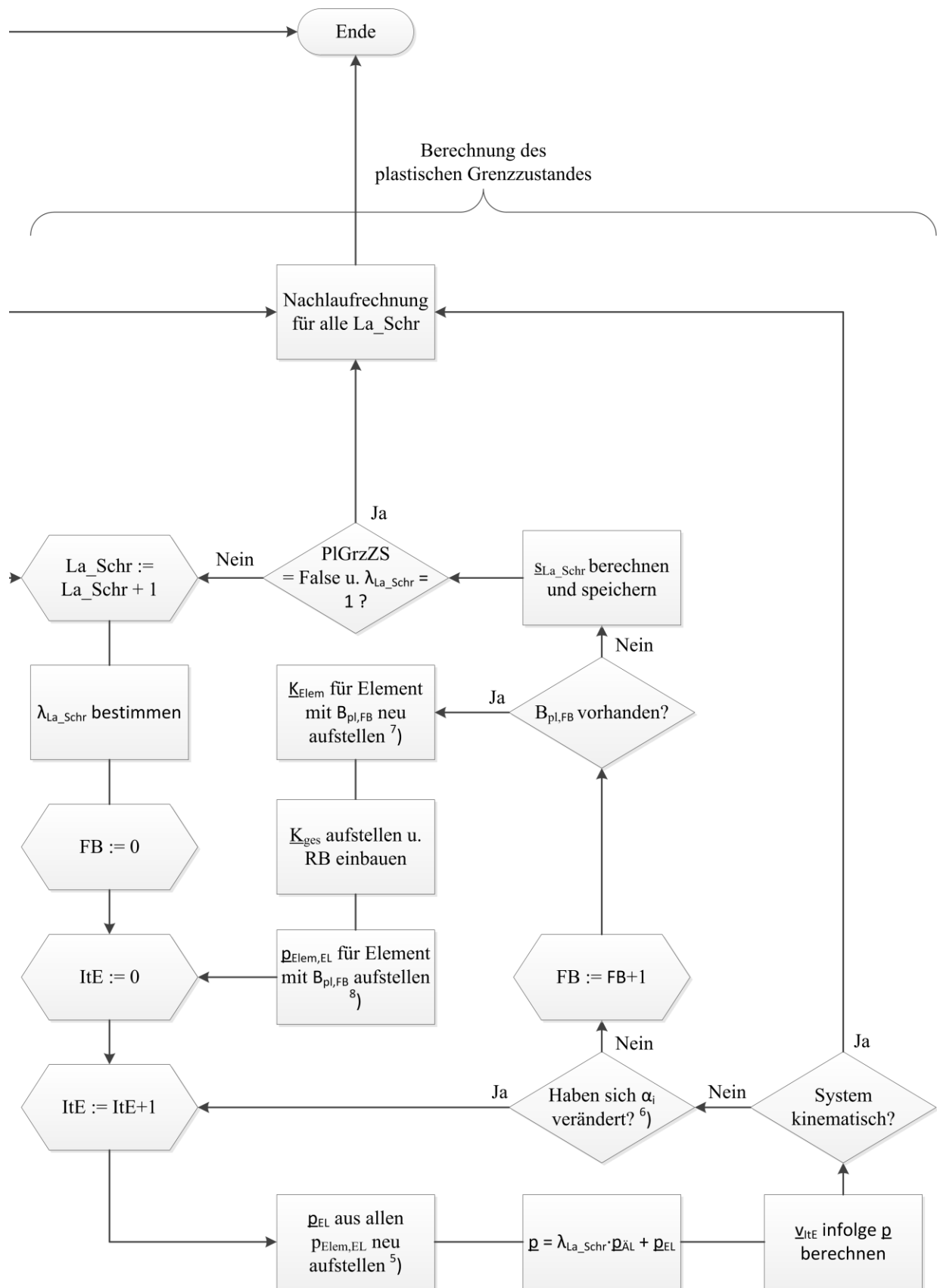
schiebungszustand des Verbundes abhängigen Elementersatzlasten  $p_{\text{Elem,EL}}$  wird in den Abschnitten 4.4.5 und 4.5.5 beschrieben.

- <sup>6)</sup> Hier wird überprüft, ob die Iterationsschleife ItE zur Angleichung der Ersatzlasten an den aktuellen Verschiebungszustand beendet wird, da sich die Richtungen  $\alpha_i$  der Verbundverschiebungen gegenüber dem vorangegangenen Iterationsschritt im Rahmen der Toleranzgrenze nicht mehr verändert haben.
- <sup>7)</sup> Wenn ein Bereich innerhalb eines Elements im aktuellen Lastschritt seine Fließverschiebung erreicht, wird die Elementsteifigkeitsmatrix  $K_{\text{Elem}}$  dieses Elements neu aufgestellt. Dazu wird das VR- bzw. VRV-Element in elastische und plastische Verbundbereiche gegliedert. Die Steifigkeitsmatrizen dieser Elementbereiche werden anschließend zu einer neuen Elementsteifigkeitsmatrix kondensiert, in der die Steifigkeitsabnahme infolge des Plastifizierens des Verbundes enthalten ist. Dieses Vorgehen ist ausführlich in den Abschnitten 4.4.4 und 4.5.4 beschrieben.
- <sup>8)</sup> Bei der unter <sup>7)</sup> beschriebenen statischen Kondensation der elastischen und plastischen Verbundbereiche wird die Steifigkeit der plastischen Verbundbereiche in der Elementsteifigkeitsmatrix zu Null gesetzt, d. h. sie ist in der Elementsteifigkeit nicht mehr enthalten. Die in den plastischen Bereichen dennoch enthaltenen konstanten resultierenden Verbundspannungen  $s_{\text{res}}$  werden durch den Ansatz von Elementersatzlasten berücksichtigt. Für alle bereits plastischen Bereiche der Gesamtstruktur erfolgte die Berechnung dieser Ersatzlasten bereits in dem unter <sup>5)</sup> beschriebenen Programmschritt. Für den einen Bereich, der aktuell plastifiziert, erfolgt die Berechnung der Elementersatzlasten in dem mit <sup>8)</sup> gekennzeichneten Programmschritt gesondert.



- ÄL: Äußere Lasten  
 La\_Schr: Nr. des aktuellen Lastschritts  
 $\lambda_{el}$ : Lastfaktor des elastischen Grenzzustandes  
 $\lambda_{La\_Schr}$ : Lastfaktor des aktuellen Lastschritts  
 $\underline{p}_{\Delta L}$ : Lastvektor der äußeren Lasten  
 $\underline{p}_{Elem,EL}$ : Element-Lastvektor der Ersatzlasten  
 $\underline{p}_{EL}$ : Ersatzlastvektor  
 $\underline{p}$ : Gesamtlastvektor  
 $\underline{K}_{Elem}$ : Element-Steifigkeitsmatrix  
 $\underline{K}_{ges}$ : Steifigkeitsmatrix des Gesamtsystems  
 RB: Randbedingungen  
 $\underline{v}$ : Verschiebungsvektor  
 $\underline{v}_{EL}$ : Verschiebungsvektor der Ersatzlasten  
 $\underline{v}_{\Delta L}$ : Verschiebungsvektor der äußeren Lasten  
 $\underline{S}_{La\_Schr}$ : Schnittgrößenvektor des aktuellen Lastschritts  
 $B_{pl,FB}$ : Bereich, der innerhalb des aktuellen Lastschritts fließt  
 $\alpha_i$ : Richtung der Verbundverschiebung an der Stelle i

**Bild 4-20:** Programmablaufplan zur iterativen numerischen Berechnung des plastischen Grenzzustandes von Holztafeln

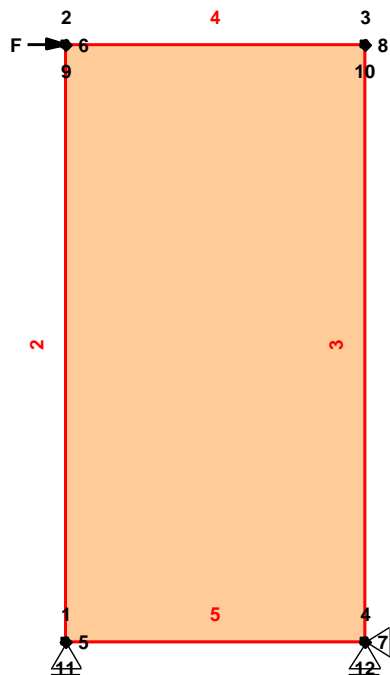


## 4.11 Beispiele zur Anwendung des Stab-Verbund-Modells für Holztafeln

### 4.11.1 Beispiel 1: Tafel als ideales Schubfeld

In Abschnitt 3.4.4 wurde bereits die Tafel analytisch beschrieben, die aus einer Platte und vier Rippen besteht. Sie trägt die an der Kopfrippe angreifende Horizontalkraft  $F$  als ideales Schubfeld ab. Unter der Annahme starrer Rippen entspricht der elastische dem plastischen Grenzzustand der Tragfähigkeit. Mit einer Verbindungsmittelbeanspruchbarkeit von  $R = 635\text{N}$  und einem Verbindungsmittelabstand  $a_v = 50\text{mm}$  beträgt die Tragfähigkeit einer solchen 1,25m langen und 2,50m hohen Tafel nach Gl. (3.12) bzw. (3.13)

$$F_{\text{el}} = F_{\text{pl}} = \frac{0,635\text{kN} \cdot 1250\text{mm}}{50\text{mm}} = 15,875\text{kN}. \quad (4.91)$$

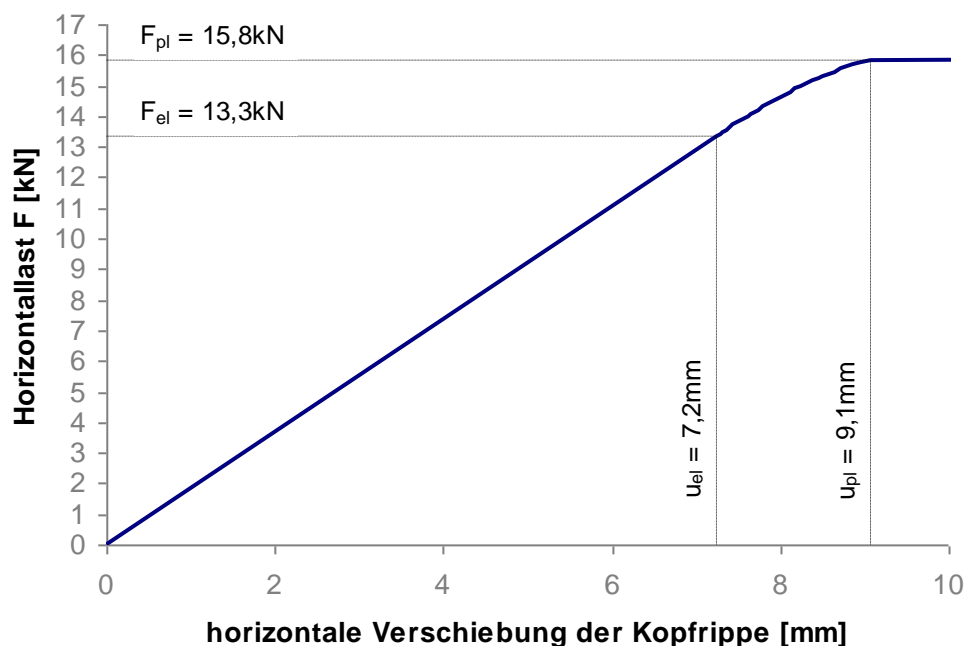


**Bild 4-21:** Statisches Modell der Tafel mit Belastung  $F$ , Knotennummerierung (schwarz) und Elementnummerierung (rot)

Im Folgenden wird die oben beschriebene Tafel mit vier VR-Elementen, die in Abschnitt 4.4 beschrieben wurden, modelliert. Die Verbundsteifigkeit  $K$  beträgt  $500\text{N/mm}$ . Die Beplankung wird Abschnitt 4.5.4 entsprechend durch die starre Kopplung der vier Plattenknoten modelliert. Das statische Modell der Tafel ist in Bild 4-21 dargestellt. Die Elementnummern, im Folgenden mit El.-Nr.

abgekürzt, sind rot dargestellt, während die Knotennummern, im Folgenden mit Kn.-Nr. abgekürzt, schwarz sind. Wenn mehrere Knotennummern um einen sichtbaren Knoten herum angeordnet sind, bedeutet dies, dass sich an dieser Stelle mehrere koinzidente Knoten befinden, die i. d. R. nicht miteinander verbunden sind. Das Modell der Tafel besteht aus insgesamt 5 Elementen und 12 Knoten. Die Platte mit der El.-Nr. 1 besteht aus einer starren Kopplung der Knoten 1 bis 4. Die Randrippen (El.-Nr. 2 bis 5) werden mit VR-Elementen modelliert, die an die Plattenknoten (Kn.-Nr. 1 bis 4) angeschlossen sind, und die je zwei Rippenknoten besitzen (Kn.-Nr. 5 bis 12). Die vertikalen Randrippen (El.-Nr. 2 und 3) sind in ihren Fußpunktknoten (Kn.-Nr. 5 und 7) in vertikaler Richtung starr gelagert. Die Fußrippe (El.-Nr. 5) ist an ihrem rechten Rippenknoten (Kn.-Nr. 12) in horizontaler Richtung starr gelagert.

Die an der Kopfrippe angreifende Horizontallast  $F$  wird von Null bis zum Erreichen der kinematischen Kette des Modells gesteigert. Diese Last  $F$  ist in Bild 4-22 über der Kopfverschiebung der Tafel aufgetragen.



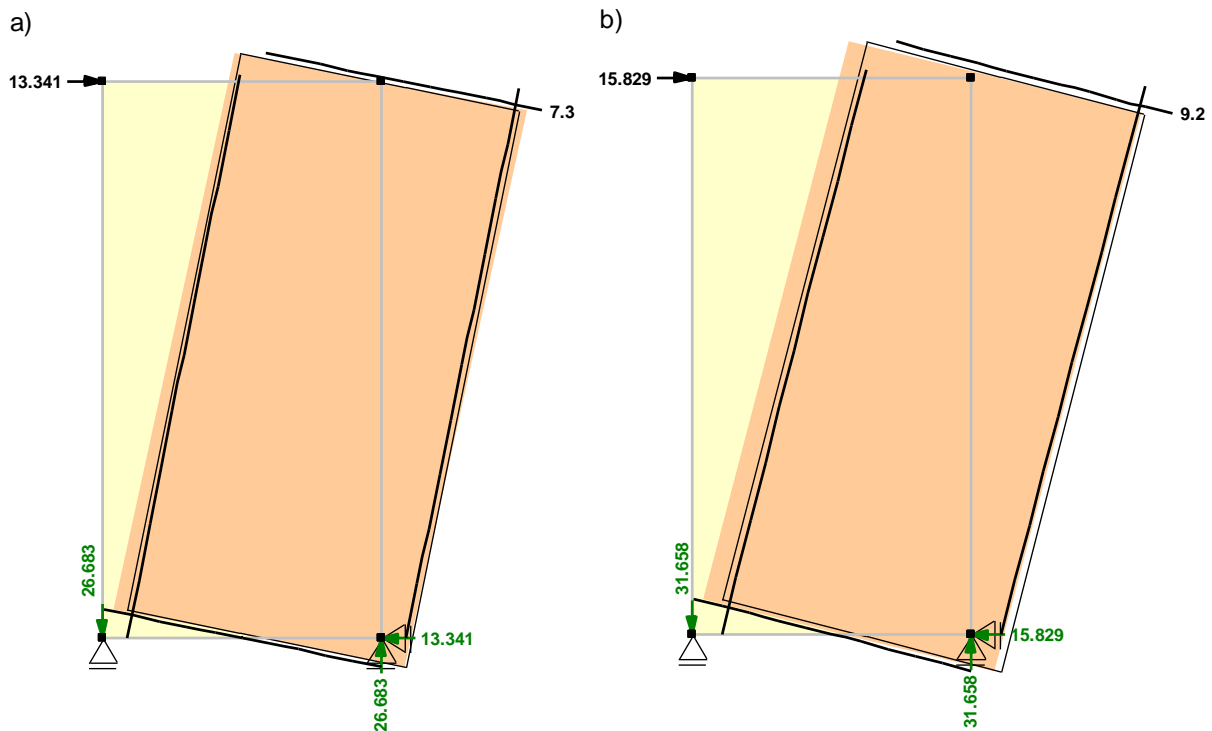
**Bild 4-22:** Kopfverschiebung der Tafel aus Bild 4-21 in Abhängigkeit von der Last  $F$

Anders als unter der Annahme starrer Rippen bewirkt die Berücksichtigung der Dehnsteifigkeit der Rippen, dass sich der elastische Grenzzustand vom plastischen Grenzzustand unterscheidet. Denn durch die Dehnung der Rippen erreichen nicht mehr alle Verbindungsmittel gleichzeitig ihre Fließgrenze, sondern

sie plastifizieren vom elastischen Grenzzustand ausgehend nach und nach bis zum Erreichen des plastischen Grenzzustandes, in welchem die Struktur kinematisch wird. Folglich verläuft die Last-Verschiebungs-Kurve in Bild 4-23 zwischen dem elastischen und dem plastischen Grenzzustand nichtlinear.

Der elastische Grenzzustand, in welchem eine Stelle des Verbundes als Erste die Fließverschiebung  $u_{pl}$  erreicht, ist bereits bei einer Horizontallast  $F_{el} = 13,341\text{kN}$  erreicht. Die mit dem Stab-Verbund-Modell berechnete plastische Grenzlast weicht mit  $F_{pl} = 15,892\text{kN}$  nur um 1 Promille von der in Gl.(4.91) angegebenen Lösung mit starren Rippen ab.

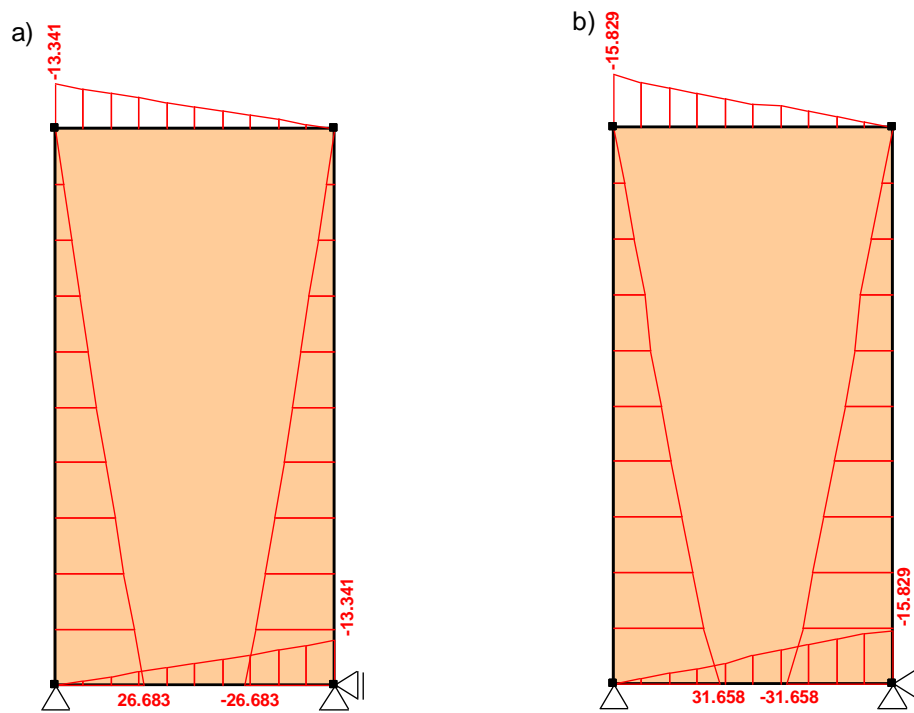
Die Verschiebungs- und Lastzustände im elastischen und im plastischen Grenzzustand sind in Bild 4-23 dargestellt.



**Bild 4-23:** Belastung in [kN], Auflagerreaktionen (grün) in [kN] und Verschiebungen (100-fach überhöht) in [mm] der Tafel im a) elastischen und b) plastischen Grenzzustand der Tragfähigkeit

Der nichtlineare Verlauf der Normalkraft über die Rippenlänge im elastischen Grenzzustand ist in Bild 4-24a nur zu erahnen. Bild 4-24b zeigt die linearen Verläufe der Normalkräfte in den Rippen im plastischen Grenzzustand der Tragfähigkeit.



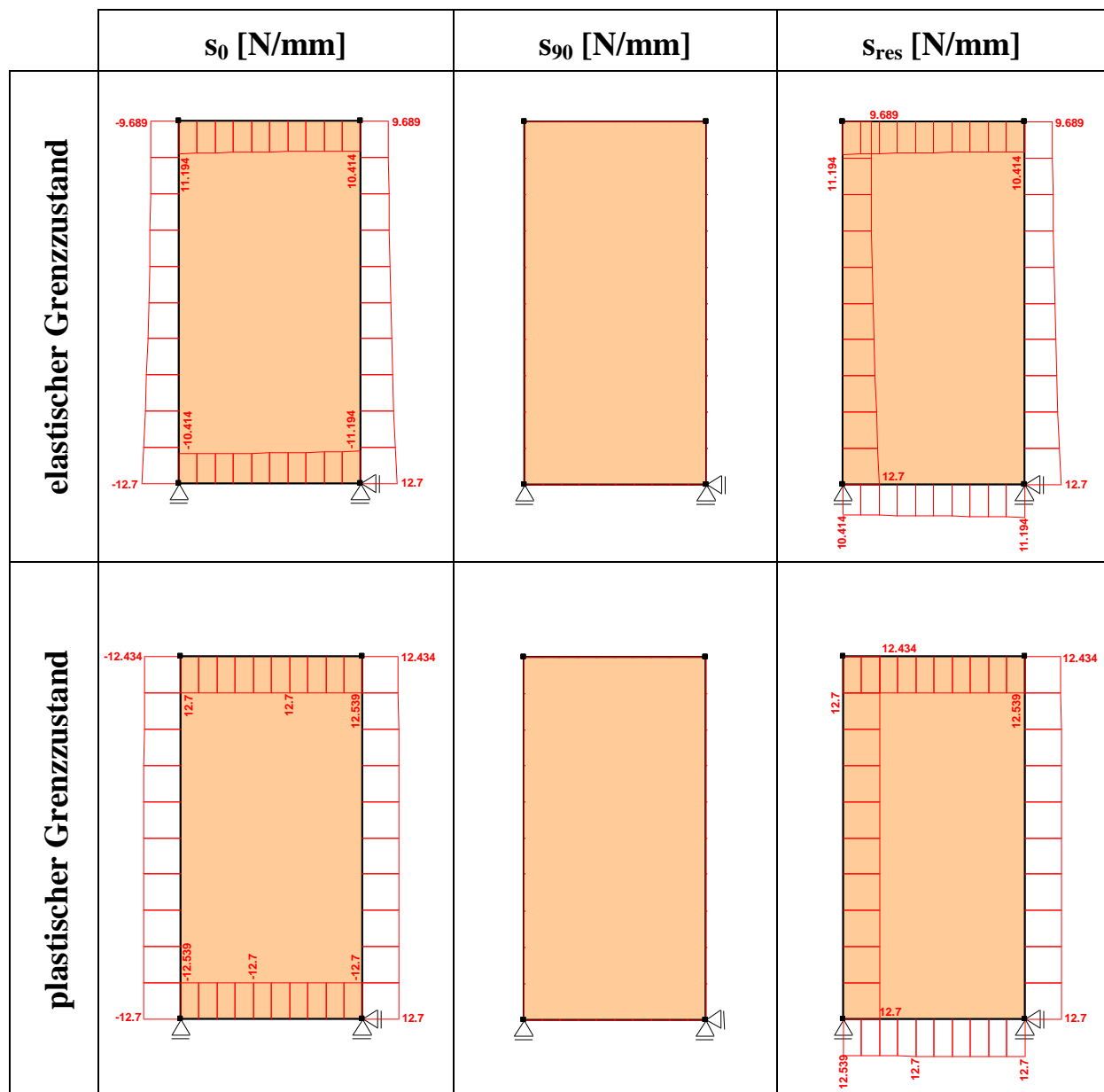


**Bild 4-24:** Normalkraftverläufe [kN] in den Rippen der Tafel im a) elastischen und b) plastischen Grenzzustand der Tragfähigkeit

Die Verbundbeanspruchungen der Tafel im elastischen und im plastischen Grenzzustand sind in Bild 4-25 dargestellt. Infolge der Längsdehnung der Rippen stellt sich im elastischen Grenzzustand ein nichtlinearer Verlauf der Verbundbeanspruchung  $s_0$  parallel zu den Rippenachsen ein. Dagegen ist der Verlauf von  $s_0$  im plastischen Grenzzustand konstant über die Rippenlängen, da alle Verbindungsmittel unabhängig von der Längsdehnung der Rippen ihre Fließverschiebung überschritten haben. Der Verlauf von  $s_0$  entspricht hier einem konstanten Schubfluss der Größe  $R/a_v$ . Daraus folgt, dass die Annahme eines konstanten Schubflusses  $s_0$  in der Schubfeldtheorie nur dann zutreffend ist, wenn sich das Tragwerk im plastischen Grenzzustand der Tragfähigkeit befindet, so dass alle Verbindungsmittel plastisch sind.

Verbundspannungen  $s_{90}$  senkrecht zu den Rippenachsen treten in diesem Modell nicht auf, da die Rippen senkrecht zu ihren Längsachsen weder belastet noch gelagert sind. Ferner wird vereinfachend davon ausgegangen, dass sich die Rippen frei durchdringen können (vgl. Bild 4-23) und somit keine Zwängungen senkrecht zu den Rippenachsen auftreten.

Die resultierenden Verbundbeanspruchungen  $s_{res}$  entsprechen in diesem Beispiel betragsmäßig den Verbundbeanspruchungen  $s_0$  parallel zu den Rippenachsen.



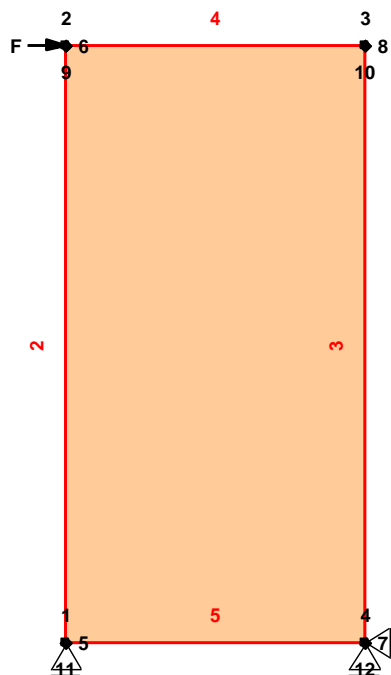
**Bild 4-25:** Verbundbeanspruchungen der Tafel als ideales Schubfeld

#### 4.11.2 Beispiel 2: Tafel mit gelenkig verbundenen Rippen

Die Tafel mit gelenkig verbundenen Rippen entspricht der Tafel aus Beispiel 1 mit dem Unterschied, dass die Rippen an ihren Enden gelenkig miteinander verbunden sind. Diese Tafel wurde in den Abschnitten 3.4.5 und 3.5.2 bereits analytisch beschrieben. Dabei wurden die Rippen vereinfachend als biege- und dehnstarr angenommen. Die elastische Grenzlast  $F_{el}$  einer solchen 1,25m langen und 2,50m hohen Tafel mit einer Verbindungsmittelbeanspruchbarkeit von  $R = 635\text{N}$  und einem Verbindungsmittelabstand  $a_v = 50\text{mm}$  beträgt  $F_{el} = 15,173\text{kN}$ .

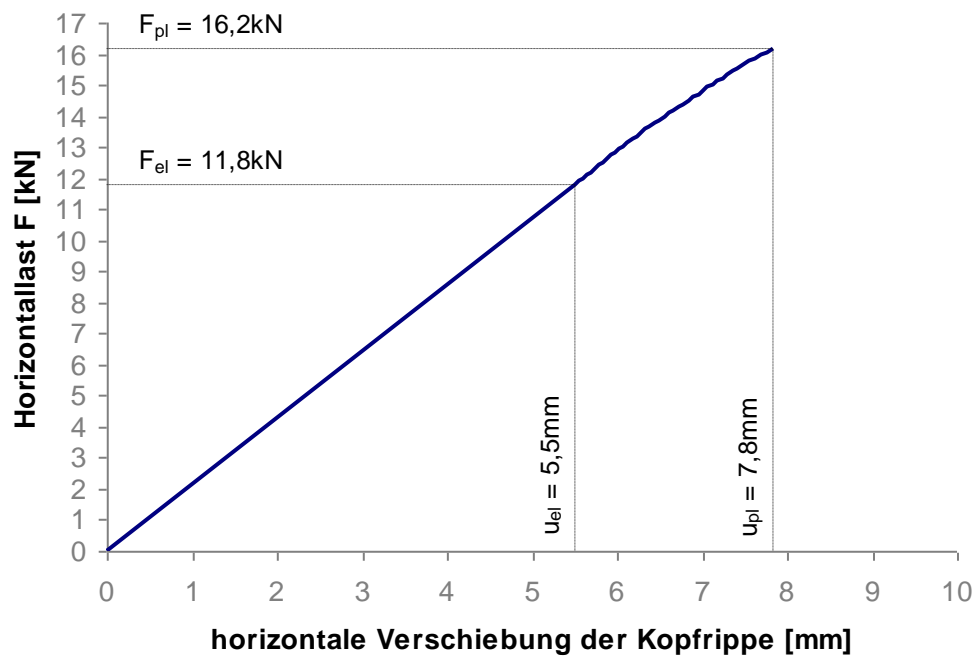
Sie kann direkt durch Einsetzen in Gl.(3.15) bestimmt werden. Die plastische Grenzlast  $F_{pl}$  kann unter der Annahme starrer Rippe iterativ mit dem in Abschnitt 3.5.2 beschriebenen Vorgehen bestimmt werden. Die plastische Grenzlast  $F_{pl}$  beträgt dann für dieses Beispiel  $F_{pl} = 17,880\text{kN}$ .

Alternativ zu dieser analytischen Lösung mit starren Rippen wird im Folgenden die numerische Lösung mit dem Stab-Verbund-Modell mit Rippen vorgestellt, die nicht mehr starr sind, sondern die eine Biege- und eine Dehnsteifigkeit besitzen. Das statische Modell entspricht dem in Abschnitt 4.11.1 vorgestellten Modell der Tafel als idealem Schubfeld. Der einzige Unterschied besteht in der gelenkigen Verbindung der Rippenendknoten. Das statische Modell ist in Bild 4-26 dargestellt.

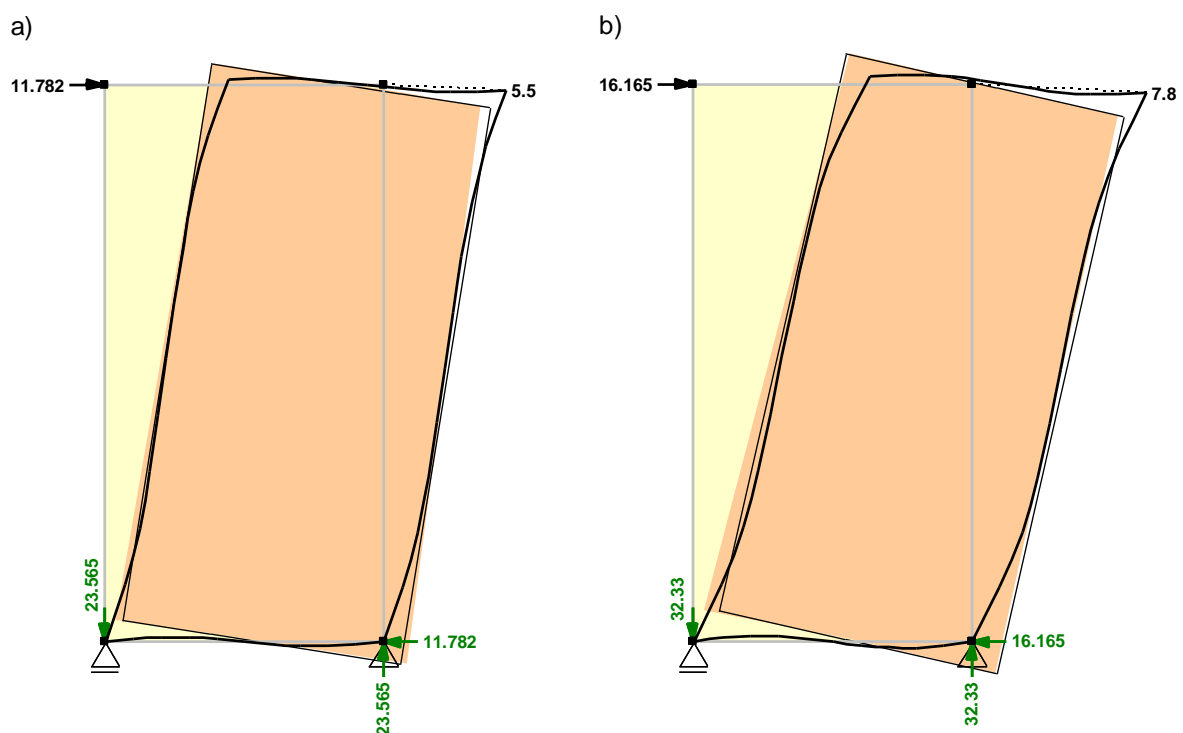


**Bild 4-26:** Statisches Modell der Tafel mit gelenkig verbundenen Rippen mit Belastung  $F$ , Knotennummerierung (schwarz) und Elementnummerierung (rot)

Auch hier wird die an der Kopfrippe angreifende Horizontallast  $F$  wieder von Null bis zum Erreichen der kinematischen Kette des Modells gesteigert. Das entsprechende Last-Verschiebungs-Diagramm ist in Bild 4-27 dargestellt. Bei einer Höchstlast von  $16,2\text{kN}$  bricht die Berechnung aus numerischen Gründen ab. Eine Vergleichsrechnung unter gleichen Randbedingungen mit der FE-Software ANSYS zeigt, dass damit rund 93% der plastischen Grenzlast von  $17,4\text{kN}$  erreicht werden.

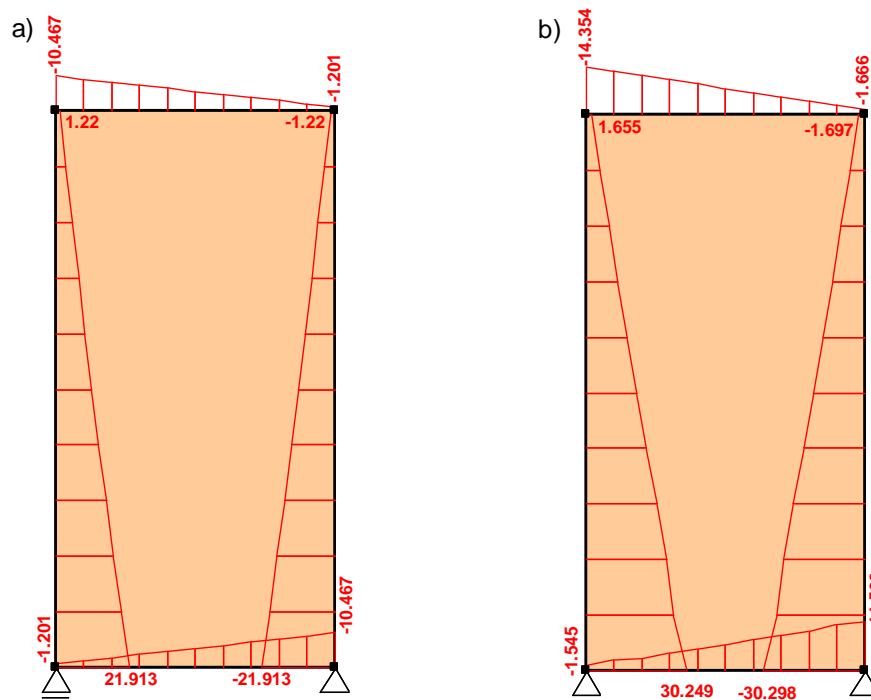


**Bild 4-27:** Kopfverschiebung der Tafel aus Bild 4-26 in Abhängigkeit von der Last  $F$



**Bild 4-28:** Belastung in [kN], Auflagerreaktionen (grün) in [kN] und Verschiebungen (100-fach überhöht) in [mm] der Tafel im a) elastischen und b) plastischen Grenzzustand der Tragfähigkeit

In Bild 4-28 sind die Verschiebungs- und Lastzustände im elastischen und im plastischen Grenzzustand dargestellt.



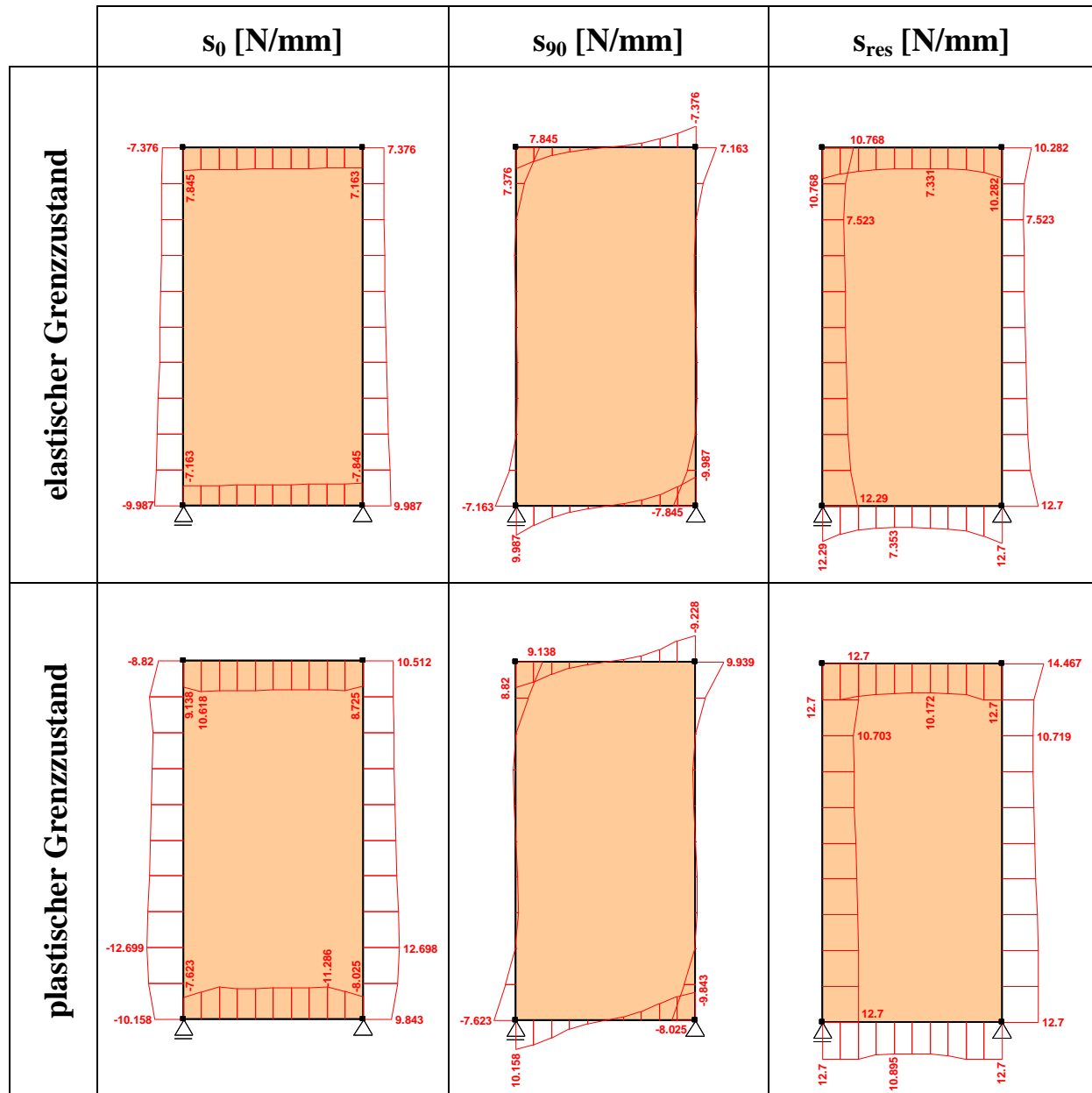
**Bild 4-29:** Normalkraftverläufe [kN] in den Rippen der Tafel im a) elastischen und b) plastischen Grenzzustand der Tragfähigkeit

Im elastischen Grenzzustand ist der Verlauf der Normalkraft über die Rippenlänge geringfügig nichtlinear, wie Bild 4-29a zeigt. Dagegen verlaufen die Normalkräfte im plastischen Grenzzustand linear (Bild 4-29b).

Die mit dem Stab-Verbund-Modell mit steifen Rippen berechneten Verbundbeanspruchungen im elastischen und im plastischen Grenzzustand sind in Bild 4-30 dargestellt. Sie sind qualitativ mit den Verläufen der Verbundbeanspruchungen in Bild 3-25 und Bild 3-33 vergleichbar, die analytisch mit der Annahme starrer Rippen generiert wurden. Die Abweichungen in Bild 4-30 sind einerseits mit der Berücksichtigung der Biege- und Dehnsteifigkeit der Rippen, andererseits mit numerischen Ungenauigkeiten zu erklären.

Während im elastischen Grenzzustand sowohl die Verbundbeanspruchungen  $s_0$  parallel und  $s_{90}$  senkrecht zur Rippenachse als auch die daraus resultierende Verbundbeanspruchung  $s_{res}$  nichtlinear verlaufen, ist die resultierende Verbundbeanspruchung  $s_{res}$  im plastischen Grenzzustand konstant. Denn im elastischen Grenzzustand ist  $s_{res}$  proportional zur Relativverschiebung zwischen Rippe und Plattenrand. Dagegen hat sie im plastischen Grenzzustand den konstanten Wert

$R/a_v$ , also den Quotienten aus der Verbindungsmittelbeanspruchbarkeit und dem Verbindungsmittelabstand.

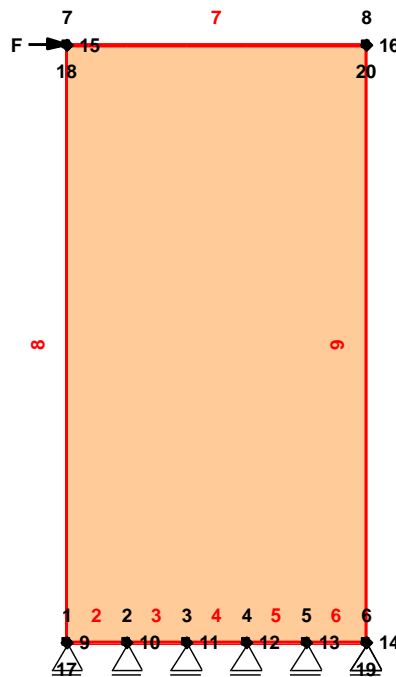


**Bild 4-30:** Verbundbeanspruchungen der Tafel mit gelenkig verbundenen Rippen

#### 4.11.3 Beispiel 3: Tafel ohne Zugverankerung

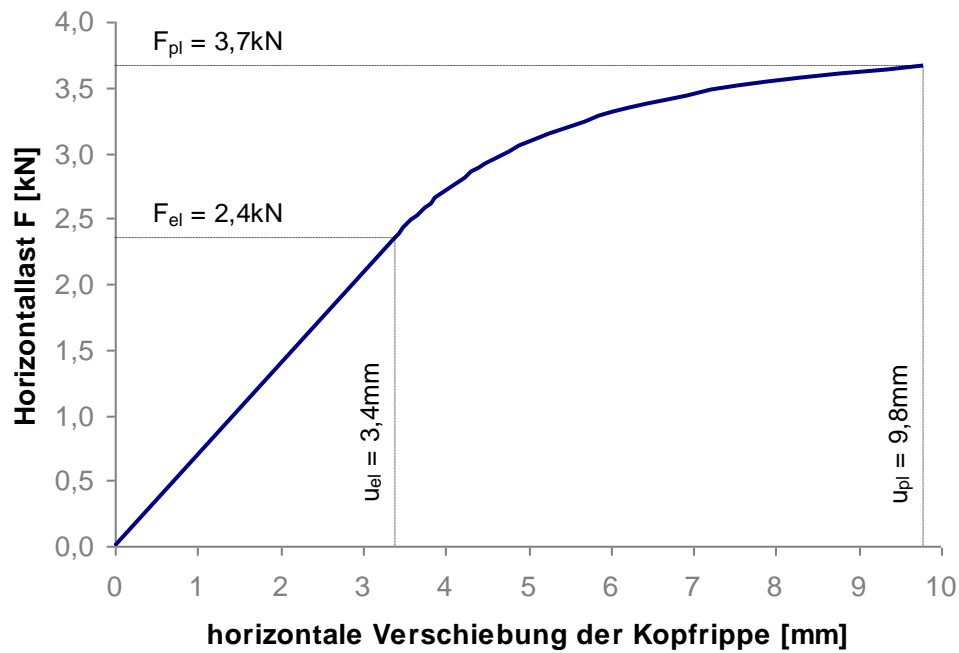
Die an ihren vertikalen Randrippen nicht zugverankerte Wandtafel, die in den Abschnitten 3.4.6 und 3.5.3 bereits als Tafel mit starren Rippen ohne Zugverankerung behandelt wurde, wird hier unter Berücksichtigung der Steifigkeiten der Rippen modelliert. Die Modellierung der Rippen und ihres Verbundes mit der

Beplankung erfolgt dabei mit dem in Abschnitt 4.4 beschriebenen VR-Element. Die Platte, welche die Beplankung bildet, wird gemäß Abschnitt 4.5.4 durch die starre Kopplung der Plattenknoten modelliert. Anders als in den Beispielen 1 und 2 wird hier die Fußrippe senkrecht zu ihrer Rippenachse punktwise gelagert.

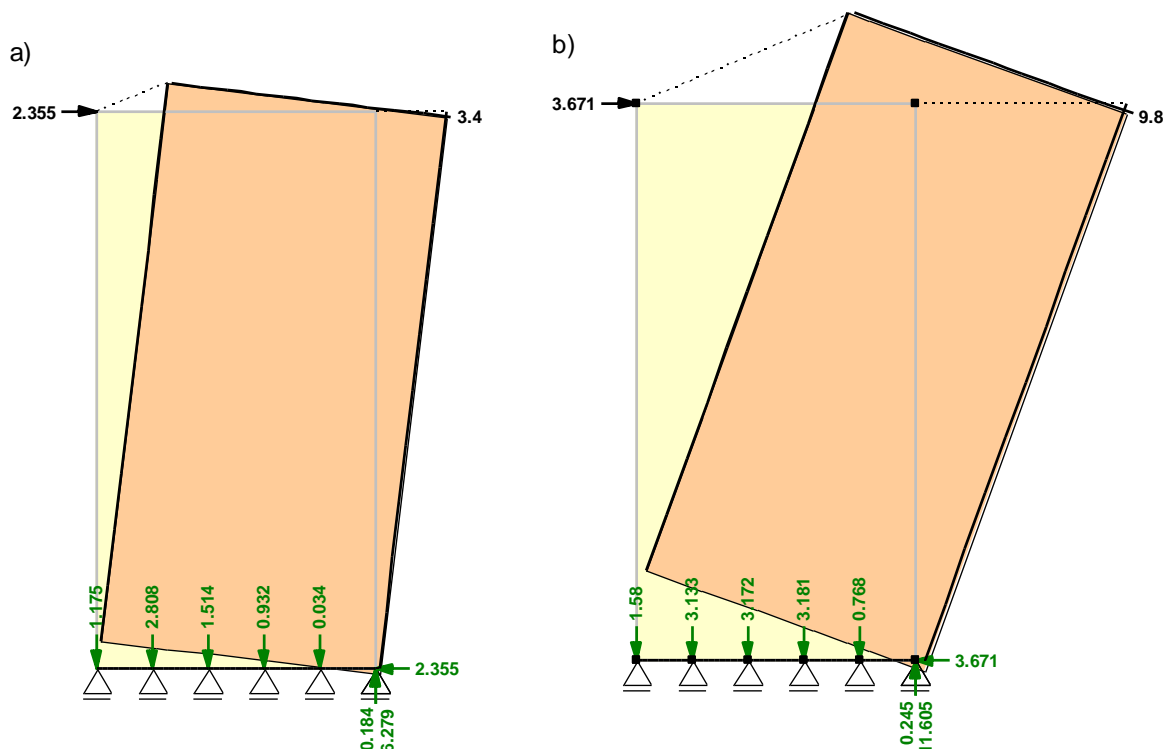


**Bild 4-31:** Statisches Modell der Tafel ohne Zugverankerung mit Belastung, Knotennummerierung (schwarz) und Elementnummerierung (rot)

In Bild 4-31 ist das statische Modell der Wandtafel dargestellt. Das Modell besteht aus insgesamt neun Elementen und zwanzig Knoten. Die Platte mit der El.-Nr. 1 besteht aus einer starren Kopplung der Knoten 1 bis 8. Die vertikalen Randrippen (El.-Nr. 8 und 9) und die Kopfriple (El.-Nr. 7) werden mit VR-Elementen modelliert, die an die Plattenknoten (Kn.-Nr. 1, 6, 7 und 8) angeschlossen sind, und die je zwei Rippenknoten besitzen (Kn.-Nr. 15 bis 20). Der Fußpunkt der rechten Randrippe (Kn.-Nr. 19) ist in vertikaler Richtung starr gelagert. Der Fußpunkt der linken Randrippe (Kn.-Nr. 17) ist nicht gelagert. Um eine annähernd kontinuierliche Lagerung der Fußrippe zu erhalten, wurde diese in fünf vertikal gelagerte VR-Elemente (El.-Nr. 2 bis 6) gegliedert, die untereinander sowohl an den Rippenknoten als auch an den Plattenknoten gekoppelt sind. An jedem Rippenknoten der Fußrippe (Kn.-Nr. 9 bis 14) befindet sich ein vertikales Auflager, am Endknoten (Kn.-Nr. 14) zusätzlich ein horizontales Auflager.



**Bild 4-32:** Kopfverschiebung der Tafel aus Bild 4-31 in Abhängigkeit von der Last  $F$

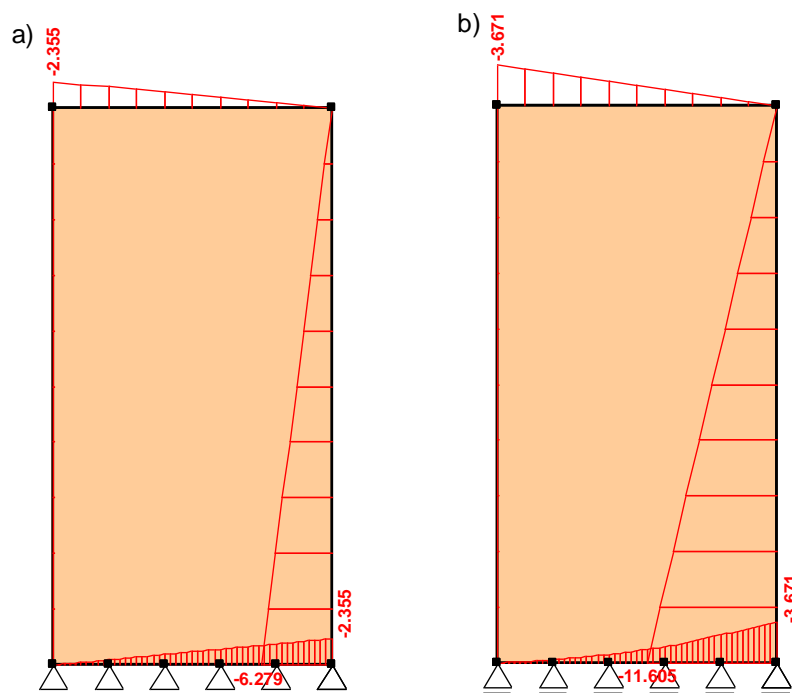


**Bild 4-33:** Belastung in [kN], Auflagerreaktionen (grün) in [kN] und Verschiebungen (100-fach überhöht) in [mm] der Tafel ohne Zugverankerung im a) elastischen und b) plastischen Grenzzustand der Tragfähigkeit



In Abschnitt 3.5.3 wurde die plastische Grenzlast dieser Tafel ohne Zugverankerung unter der Annahme starrer Rippen mit der Fließverbundmethode bereits bestimmt. Sie beträgt  $F_{pl} = 3,92\text{kN}$ .

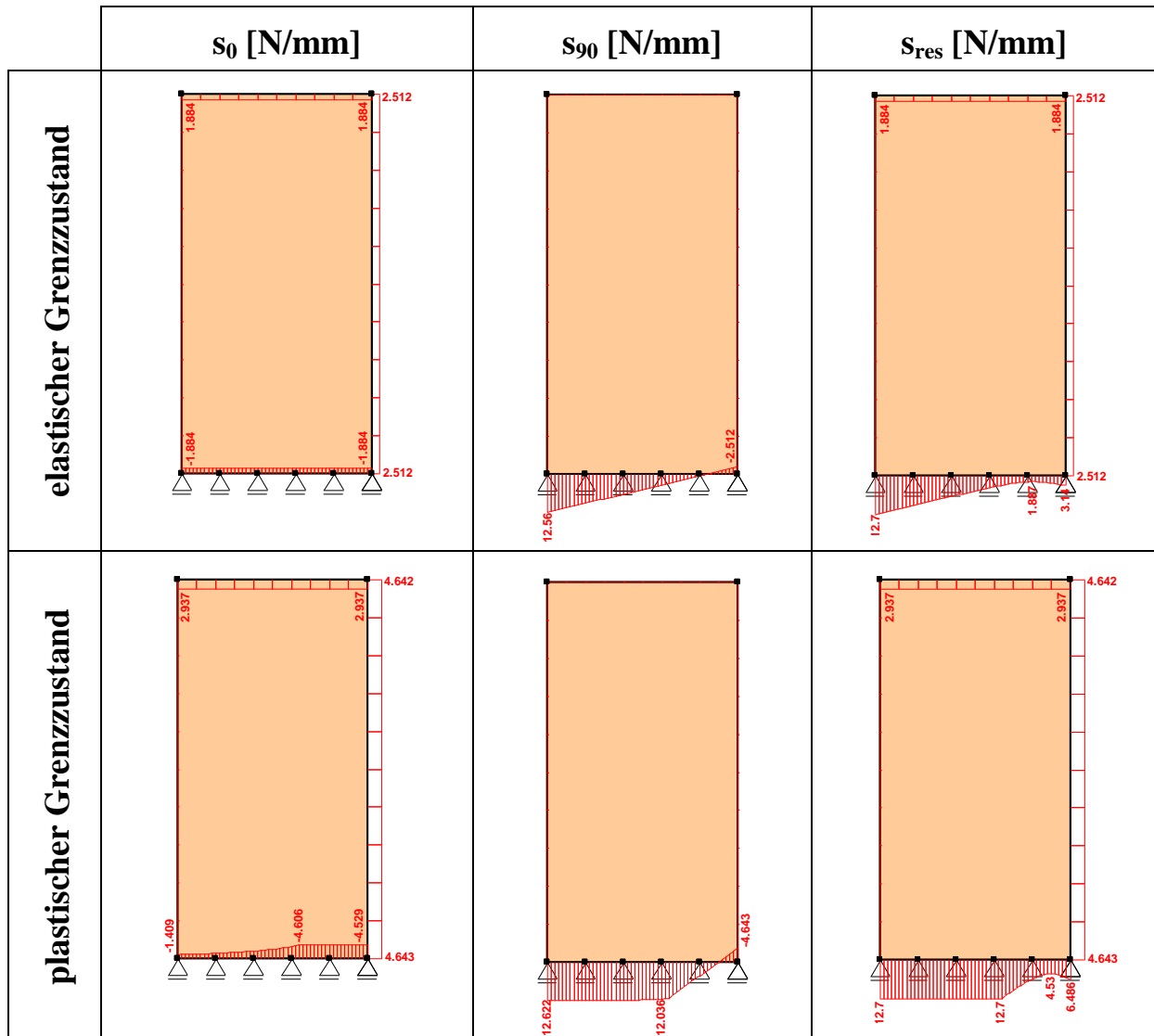
Nachfolgend wird alternativ zu dieser analytischen Lösung mit starren Rippen die numerische Lösung des Stab-Verbund-Modells mit steifen Rippen dargestellt. Auch hier wird die äußere Last  $F$  wieder von Null bis zum Erreichen des plastischen Grenzzustandes gesteigert. Das Last-Verschiebungs-Diagramm ist in Bild 4-32 dargestellt. Die Verschiebungen im elastischen und im plastischen Grenzzustand des Modells zeigt Bild 4-33. Der plastische Grenzzustand wird bei einer Horizontallast  $F_{pl} = 3,67\text{kN}$  erreicht. Dieser Wert weicht nur um rund 6 Prozent von der in Abschnitt 3.5.3 dargestellten analytischen Lösung mit starren Rippen ab, obwohl die numerische Berechnung bei einer Kopfverschiebung von 9,8mm abgebrochen wurde.



**Bild 4-34:** Normalkraftverläufe [kN] in den Rippen der Tafel ohne Zugverankerung im a) elastischen und b) plastischen Grenzzustand der Tragfähigkeit

Bild 4-34 zeigt die Normalkraftverläufe in den Rippen der Tafel im elastischen und im plastischen Grenzzustand. In beiden Fällen sind die Verläufe in der Kopfrippe und in den vertikalen Rippen nichtlinear, da die Verbindungsmittel in diesen Bereichen nicht ihre Fließgrenze erreichen. Auch der Normalkraftverlauf

in der Fußrippe ist in beiden Fällen nichtlinear. Während dies im elastischen Grenzzustand ebenfalls mit dem elastischen Verbund zu begründen ist, führt die nicht konstante Verbundbeanspruchung  $s_0$  im plastischen Grenzzustand (Bild 4-35) zum nichtlinearen Verlauf der Normalkraft.



**Bild 4-35:** Verbundbeanspruchungen der Tafel ohne Zugverankerung

Der nicht konstante Teil der resultierenden Verbundbeanspruchung am unteren Plattenrand im plastischen Grenzzustand in Bild 4-35 begründet sich mit dem Rechenabbruch bei Erreichen einer Kopfverschiebung von 9,8mm. Würde die äußere Horizontalkraft  $F$  unter Tolerierung großer Verschiebungen weiter gesteigert, so würde auch dieser Verbundbereich einen konstanten Wert von 12,7N/mm annehmen. Der zu erwartende Kraftzuwachs wäre allerdings gering, wie der flache Verlauf der Last-Verschiebungs-Kurve in Bild 4-32 jenseits einer Verschiebung von 9mm zeigt.

## 4.12 Vergleich der Beispielrechnungen aus den Kapiteln 3 und 4

In Bild 4-36 sind die mit der Fließverbundmethode aus Kapitel 3 und dem Stab-Verbund-Modell aus Kapitel 4 berechneten elastischen und plastischen Grenzlaster der Beispiele 1 bis 3 zusammengestellt. Allen Berechnungen liegen folgende Parameter zugrunde:

Tafelhöhe  $h = 2500\text{mm}$ ; Verbindungsmittelbeanspruchbarkeit  $R = 635\text{N}$   
 Tafellänge  $\ell = 1250\text{mm}$ ; Verbindungsmittelabstand  $a_v = 50\text{mm}$   
 Verschiebungsmodul der Verbindungsmittel  $K = 500\text{N/mm}$

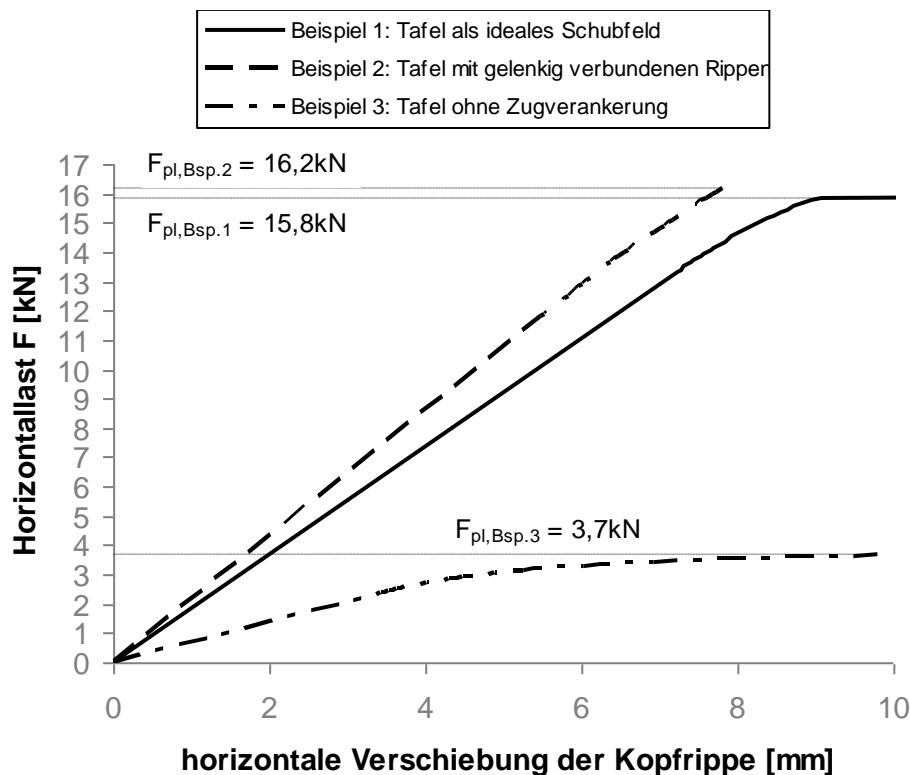
Die Fließverbundmethode basiert auf der Annahme starrer Rippen, während das Stab-Verbund-Modell die Biege- und Dehnsteifigkeit der Rippen berücksichtigt. Daher wurden den Rippen des Stab-Verbund-Modells zusätzlich folgende Parameter zugewiesen:

Elastizitätsmodul  $E = 11000\text{N/mm}^2$ ;  
 Rippenhöhe  $h = 160\text{mm}$ ; Rippenbreite  $b = 60\text{mm}$

	Beispiel 1	Beispiel 2	Beispiel 3
	Tafel als ideales Schubfeld	Tafel mit gelenkig verbundenen Rippen	Tafel ohne Zugverankerung
	Elastische Grenzlaster $F_{el}$ [kN]		
Fließverbundmethode	15,88	15,17	2,37
Stab-Verbund-Modell	13,34	11,78	2,36
	Plastische Grenzlaster $F_{pl}$ [kN]		
Fließverbundmethode	15,88	17,88	3,92
Stab-Verbund-Modell	15,83	16,17	3,67

**Bild 4-36:** Übersicht der Ergebnisse der Beispiele aus den Kapiteln 3 und 4

Der direkte Vergleich der Beispiele 1 bis 3 zeigt, dass die Tafel mit gelenkig verbundenen Rippen aus Beispiel 2 die größte plastische Tragfähigkeit besitzt. Die plastische Grenzlast der Tafel aus Beispiel 1, die das ideale Schubfeld darstellt, ist demgegenüber rund 12 Prozent geringer. Die Tafel ohne Zugverankerung in Beispiel 3 besitzt mit Abstand die geringste Tragfähigkeit. Diese beträgt nur etwa 22 Prozent der Tragfähigkeit der Tafel mit gelenkig verbundenen Rippen aus Beispiel 2. Aus diesem Vergleich wird deutlich, dass die Verankerung der vertikalen Randrippen, infolge derer die Tafeln vorwiegend auf Schub beansprucht werden, deutlich höhere Beanspruchbarkeiten der Tafeln bewirken als die kontinuierliche Verankerung der Fußrippe, die im Fußverbund überwiegend Beanspruchungen senkrecht zum Plattenrand bewirkt.



**Bild 4-37:** Kopfverschiebungen der Tafeln der Beispiele 1 bis 3 in Abhängigkeit von der Last  $F$

Während die plastische Grenzlast des Beispiels 2 größer ist als die des Beispiels 1, ist es bei der elastischen Grenzlast umgekehrt. Dies begründet sich damit, dass das höchstbeanspruchte Verbindungsmittel im idealen Schubfeld ausschließlich parallel zum Plattenrand beansprucht wird, während es in der Tafel mit gelenkig verbundenen Rippen zusätzlich zu der parallelen auch eine Bean-

spruchungskomponente senkrecht zum Plattenrand erfährt und dadurch früher fließt.

Die Unterschiede im Last-Verschiebungs-Verhalten aller drei Beispieltafeln bis zum Erreichen der plastischen Grenzlast  $F_{pl}$  sind an den in Bild 4-37 zusammengestellten Last-Verschiebungs-Diagrammen zu erkennen, die mit dem Stab-Verbund-Modell erstellt wurden.

Die *elastischen Grenzlasten*, die mit dem Stab-Verbund-Modell berechnet wurden, sind in allen drei Beispielen geringer als die mit der Fließverbundmethode errechneten elastischen Grenzlasten. Dies begründet sich mit der Annahme starrer Rippen bei der Fließverbundmethode, denn diese bewirken eine gleichmäßigere Verteilung der Beanspruchungen auf den Verbund. Folglich erreichen bei Anwendung des Stab-Verbund-Modells unter Berücksichtigung der Steifigkeiten der Rippen einzelne Verbindungsmittel bzw. Verbundbereiche infolge der Verformungen der Rippen ihre Tragfähigkeit früher als mit der Fließverbundmethode.

Die *plastischen Grenzlasten* aller drei Beispiele werden mit beiden Verfahren nahezu gleich groß berechnet. Die Abweichung von rund 12 Prozent zwischen Fließverbundmethode und Stab-Verbund-Modell im Beispiel 2 ist mit dem vorzeitigen Abbruch der numerischen Berechnung zu begründen. Wäre die Berechnung mit dem Stab-Verbund-Modell hier fortgesetzt worden, so hätte sich die plastische Grenzlast des Stab-Verbund-Modells der plastischen Grenzlast der Fließverbundmethode weiter angenähert.

Grundsätzlich ist erkennbar, dass der Einfluss der Biege- und Dehnsteifigkeit der Rippen auf die Beanspruchbarkeit der Beispieltafeln im plastischen Grenzzustand gering ist. Folglich sind hier beide Methoden gleichwertig zur Bestimmung des plastischen Grenzzustandes einsetzbar.

## 5 Zusammenfassung und Ausblick

Mit der vorliegenden Arbeit werden neue Wege aufgezeigt, das physikalisch nichtlineare Tragverhalten von scheibenartig beanspruchten Holztafelkonstruktionen zu beschreiben. Die vorgestellten Methoden sind auf Wand-, Decken- und Dachtafeln anwendbar. Mit den Methoden können elastische und plastische Grenzzustände von Holztafelkonstruktionen bestimmt werden.

Nach einer kurzen Einführung in die Problematik der statischen Modellbildung wird in Kapitel 1 auf die gegenwärtig zur Bemessung von Holztafelkonstruktionen angewandte Schubfeldmethode und deren Anwendungsgrenzen eingegangen. Im realen Tragwerk beteiligen sich z. B. auch Tragwerksteile an der Lastabtragung, die bei Anwendung der Schubfeldmethode vernachlässigt werden (z. B. Wandteile ober- und unterhalb von Fensteröffnungen). Dadurch erfährt der Verbund zwischen Holzrippen und Beplankung nicht nur Beanspruchungen  $s_0$  parallel zum Plattenrand sondern auch Beanspruchungen  $s_{90}$  senkrecht zum Plattenrand. Die Rippen erfahren somit im realen Tragwerk neben den Längsbeanspruchungen auch Biege- und Schubbeanspruchungen und die Platten in der Beplankung erfahren auch Beanspruchungen senkrecht zum Plattenrand. Bei Anwendung der Schubfeldtheorie kann über die Größe dieser Beanspruchungen keine Aussage gemacht werden. Ferner können Holztafelkonstruktionen, deren Belastung nicht vorwiegend über Schubfelder abgetragen wird, mit der Schubfeldmethode nicht oder nur unzureichend modelliert werden. Auf dieser Grundlage entstand die dieser Arbeit zugrunde liegende Motivation zur Entwicklung alternativer Methoden der physikalisch nichtlinearen statischen Modellierung von scheibenartig beanspruchten Holztafelkonstruktionen. Diese Methoden sind in den Kapiteln 3 und 4 dargestellt.

Kapitel 2 beschreibt einige aktuelle Fälle physikalisch nichtlinearen Tragverhaltens im Holzbau und stellt das Fehlen einer systematischen Nutzung plastischer Tragreserven im Holztafelbau heraus. Nach einer kurzen Darstellung der Grundlagen der Fließgelenktheorie im Stahlbau wird deren Übertragbarkeit auf den Holztafelbau zur Abschätzung unterer Traglastgrenzen gezeigt.

Die Fließverbundmethode mit starren Rippen und starren Platten in Kapitel 3 eignet sich für Handrechnungen und führt bei kleinen ebenen Tragwerken zu allgemeinen analytischen Lösungen für die Spannungen und Verformungen von

Holztafelkonstruktionen. Auf Basis des mit dem Weggrößenverfahren bestimmten elastischen Grenzzustandes kann der plastische Grenzzustand dieser Tragwerke unter Berücksichtigung des duktilen Verhaltens des Verbundes mit Interaktionsbeziehungen der resultierenden Verbundschnittgrößen abgeschätzt werden. Ein allgemeingültiger Algorithmus zur Bestimmung des plastischen Grenzzustandes, z. B. ein Iterationsverfahren, steht jedoch noch aus. Das in Abschnitt 3.4 vorgestellte Weggrößenverfahren zur analytischen Bestimmung des elastischen Grenzzustandes und die in Abschnitt 3.5 angegebenen Interaktionsbeziehungen zur Bestimmung des plastischen Grenzzustandes könnten als Grundlage für ein solches allgemeingültiges Verfahren dienen. Erste Ansätze für einen allgemeingültigen Algorithmus enthalten die Beispiele 1 bis 3, in denen die vorgestellte Fließverbundmethode an einfachen Holztafeltragwerken zur Anwendung kommt. Verallgemeinert könnte daraus ein Vorgehen analog zur Schnittgrößeniteration der Fließgelenktheorie im Stahlbau, die in Abschnitt 2.2 beschrieben ist, entwickelt werden.

Die Annahme biege- und dehnstarrer Rippen führt häufig zu deutlichen Abweichungen von den Ergebnissen einer FEM-Berechnung mit biege- und dehnsteifen Rippen (vgl. Bild 1-4h und m). Der Einfluss der Steifigkeit der Rippen ist insbesondere dann von Bedeutung, wenn die Rippen nennenswerten Verbundbeanspruchungen  $s_{90}$  senkrecht zur Rippenachse ausgesetzt sind. Zum Beispiel weisen die Kopf- und Fußrippe in Bild 1-4k deutliche Krümmungen auf, die der geringen Biegesteifigkeit der schlanken Rippen geschuldet sind. Die Annahme starrer Rippen führt hier lediglich zu einer Starrkörperverschiebung und -verdrehung der Rippen, die eine Verformungsfigur gemäß Bild 1-4f und damit eine andere Verteilung der Beanspruchungen (Bild 1-4h) innerhalb der Wandtafel zur Folge hat. Bei der Wahl eines statischen Modells mit starren Rippen gemäß Kapitel 3 könnte dieser Effekt z. B. durch die Einführung zusätzlicher Momentengelenke in langen Rippen verringert werden. Bezüglich der Anzahl und der Lage solcher Gelenke im statischen Modell sind weitere Forschungen erforderlich.

Auf Tragwerke, deren Rippen im Verhältnis zu den Verbindungen von Rippen und Beplankung eine sehr hohe Biegesteifigkeit besitzen, wie dies z. B. bei Hohlkastenträgern mit nachgiebigem Verbund der Fall sein kann, oder bei nachgiebig verbundenen Massivholzelementen ist die Methode aus Kapitel 3 ebenfalls anwendbar.

In Kapitel 4 wird ein Stab-Verbund-Modell für Holztafelkonstruktionen vorgestellt, mit dem sowohl das linear elastische als auch das physikalisch nichtlineare Tragverhalten bis zum Erreichen der Traglast, also bis zum Versagen des Tragwerks, modelliert werden können. Dieses Modell eignet sich für numerische Berechnungen mittels Statiksoftware. Für linear elastisches Tragverhalten liefert die Anwendung des Stab-Verbund-Modells eine analytische Lösung der Rippenschnittgrößen, der Verbundbeanspruchungen und der Verformungen, im plastischen Bereich eine iterativ berechnete Lösung. Dies gelingt u. a. durch die Berücksichtigung der Biege- und der Dehnsteifigkeit der Rippen mit den in den Abschnitten 4.4 und 4.5 beschriebenen neu entwickelten Elementen, die sowohl die Rippe als auch ihren Verbund zur Beplankung gemeinsam modellieren. Das Stab-Verbund-Modell ist auf nahezu beliebige Problemstellungen im Holztafelbau anwendbar, unabhängig davon, wie das Tragwerk konstruiert ist. So können auch Holztafeln mit freien Plattenrändern modelliert werden, die planmäßig Verbindungsmittelbeanspruchungen senkrecht zu den Plattenrändern aufweisen. Auch Holztafeln mit nicht orthogonalen Rippen, wie sie z. B. in Giebelwänden (Bild 1-6) oder in Deckentafeln über nicht orthogonalen Grundrissen vorkommen, können mit dem Stab-Verbund-Modell modelliert werden. Ferner kann der wichtige Einfluss plastifizierender Zuganker sowie abhebender Lager bei Wandtafeln berücksichtigt werden.

Das Zusammenwirken der Holztafeln mit Tragwerksteilen, die nicht in Holztafelbauart ausgeführt werden, z. B. Brettschichtholzunterzügen, Vollholzstützen, Stahlrahmen oder Stahlbetonstützen, ist in demselben Stabwerk modellierbar.

Gegenüber der Schubfeldmethode der DIN 1052 und des EC5 kann das nichtlineare Last-Verformungs-Verhalten von Holztafelkonstruktionen mit dem Stab-Verbund-Modell aus Kapitel 4 wirklichkeitsnäher abgeschätzt werden. Die aus dem Stab-Verbund-Modell gewonnenen Ergebnisse (Beanspruchungen und Verformungen) sind den Ergebnissen einer FE-Analyse, wie z. B. den Ergebnissen in Bild 1-4k-o, vergleichbar. Durch die Implementierung der neu entwickelten Elemente in ein Stabwerksprogramm können solche Ergebnisse jedoch wesentlich schneller und übersichtlicher erzeugt werden als mit FE-Software.



## 6 Literaturverzeichnis

- [1] **Anders, C. (2007):** *Traglastverfahren für Holztafeln*, Diplomarbeit, HAWK Hildesheim
- [2] **Blaß, H. J., Görlacher, R., Steck, G. (1995):** *STEP 1, Holzbauwerke nach Eurocode 5: Bemessung und Baustoffe*. In: Informationsdienst Holz, Arbeitsgemeinschaft Holz, Fachverlag Holz, Düsseldorf
- [3] **Blaß, H. J., Görlacher, R., Steck, G. (1995):** *STEP 3, Holzbauwerke nach Eurocode 5: Grundlagen, Entwicklungen, Ergänzungen*. In: Informationsdienst Holz, Arbeitsgemeinschaft Holz, Fachverlag Holz, Düsseldorf
- [4] **Blaß, H. J., Ehlbeck, J., Kreuzinger, H., Steck, G. (2005):** *Erläuterungen zu DIN 1052:2004-08*, 2. Aufl., DGfH, München
- [5] **Collins, M., Kasal, B., Paevere, P., Foliente, G. C. (2005):** *Three-Dimensional Model of Light Frame Wood Buildings. I: Model Description*, J. Struct. Engrg., ASCE, 131(4), 676-683
- [6] **Collins, M., Kasal, B., Paevere, P., Foliente, G. C. (2005):** *Three-Dimensional Model of Light Frame Wood Buildings. I: Experimental Investigation and Validation of Analytical Model*, J. Struct. Engrg., ASCE, 131(4), 684-692
- [7] **Dettmann, O. (2003):** *Entwicklung von Modellen zur Abschätzung der Steifigkeit und Tragfähigkeit von Holztafeln*, Dissertation, Technische Universität Braunschweig
- [8] **DIN EN 26891 (1991-07):** *Holzbauwerke – Verbindungen mit mechanischen Verbindungsmitteln, Allgemeine Grundsätze für die Ermittlung der Tragfähigkeit und des Verformungsverhaltens*, Beuth Verlag Berlin
- [9] **DIN EN 383 (2007-03):** *Holzbauwerke – Prüfverfahren – Bestimmung der Lochleibungsfestigkeit und Bettungswerte für stiftförmige Verbindungsmittel*, Beuth Verlag Berlin
- [10] **DIN 1052 (2008-12):** *Entwurf, Berechnung und Bemessung von Holzbauwerken – Allgemeine Bemessungsregeln und Bemessungsregeln für den Hochbau*, Beuth Verlag Berlin

- 
- [11] **Duddeck, H. (1984):** *Traglasttheorie der Stabtragwerke*, Beton-Kalender 1984, Teil II, Ernst & Sohn, Berlin
- [12] **Duddeck, H., Ahrens, H. (1998):** *Statik der Stabtragwerke*, Beton-Kalender 1998, Teil I, Ernst & Sohn, Berlin
- [13] **Ebner, H. (1933):** *Die Beanspruchung dünnwandiger Kastenträger auf Drillung bei behinderter Querschnittsverwölbung*, Zeitschrift für Flugtechnik und Motorluftschiffahrt, 24. Jahrg., S. 645-655 und S. 684-692
- [14] **Ebner, H., Köller, H. (1937):** *Zur Berechnung des Kraftverlaufs in versteiften Zylinderschalen*, Luftfahrtforschung, 1937, Bd. 14, S. 607-626
- [15] **Eurocode 5:** *Bemessung und Konstruktion von Holzbauten – Teil 1-1: Allgemeines – Allgemeine Regeln und Regeln für den Hochbau: Deutsche Fassung EN 1995-1-1:2004+A1:2008*, Beuth Verlag Berlin
- [16] **Graf, W., Vassilev, T. (2006):** *Einführung in computerorientierte Methoden der Baustatik*, Ernst & Sohn Verlag, Berlin
- [17] **Gupta, A. K., Kuo, G. P. (1985):** *Wood-Framed Shear Walls with Uplifting*, J. Struct. Eng., ASCE 113, Nr. 2, S. 241-259
- [18] **Hahn, J. (1981):** *Durchlaufträger, Rahmen, Platten und Balken auf elastischer Bettung*, 13. Auflage, Werner-Verlag, Düsseldorf
- [19] **Hall, C. (2010):** *Traglasttheorie für Holztafelwände*, Tagungsband Forschungskolloquium Holzbau Forschung + Praxis, Kap. I-c, Universität Stuttgart
- [20] **Hertel, H. (1960):** *Leichtbau: Bauelemente, Bemessung und Konstruktion von Flugzeugen und anderen Leichttragwerken*, Springer Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg
- [21] **Hörsting, P. (2008):** *Zum Tragverhalten druck- und biegebeanspruchter Holzbauteile*, Dissertation, Technische Universität Braunschweig
- [22] **Hilson, B. O. (1995):** *Nagelverbindungen I*. In: STEP 1 [2], S. C4/1-C4/8
- [23] **Johansen, K. W. (1949):** *Theory of timber connections*, International Association of Bridge and Structural Engineering, Bern: Publication No. 9, S. 249-262

- 
- [24] **Källsner, B., Lam, F. (1995):** *Diaphragms and Shear Walls*. In: STEP 3 [3], S. 15/1-15/19
- [25] **Kasal, B., Leichti, R. J. (1992):** *Nonlinear Finite-Element Model for Light-Frame Stud Walls*, J. Struct. Engrg., ASCE, 118(11), 3122-3135
- [26] **Kasal, B., Leichti, R. J. (1992):** *Incorporating Load Sharing in Shear Wall Design of Light-Frame Structures*, J. Struct. Engrg., ASCE, 118(12), 3350-3361
- [27] **Kasal, B., Leichti, R. J., Itani, R. Y. (1994):** *Nonlinear Finite-Element Model of Complete Light-Frame Wood Structures*, J. Struct. Engrg., ASCE, 120(1), 100-119
- [28] **Kasal, B., Collins, M. S., Paevere, P., Foliente, G. C. (2004):** *Design Models of Light Frame Wood Buildings under Lateral Loads*, J. Struct. Engrg., ASCE, 130(8), 1263-1271
- [29] **Kessel, M. H., Schönhoff, T. (2001):** *Entwicklung eines Nachweisverfahrens für Scheiben auf der Grundlage von Eurocode 5 und DIN 1052 neu*, Abschlussbericht zum Forschungsvorhaben AiF 12100 N
- [30] **Kessel, M. H. (2003):** *Tafeln: Eine elastische, geometrisch lineare Beschreibung*, Holzbau Kalender 2003, Bruderverlag, 599 – 632
- [31] **Kessel, M. H. (2004):** *Vereinfachte Berechnung von scheibenartig beanspruchten Tafeln und Nachweis der Scheibenbeanspruchung von Tafeln*, In: [4]
- [32] **Kessel, M. H., Hörsting, P. (2008):** *Zum Tragverhalten von druck- und biegebeanspruchten Holzbauteilen*. In: Bauingenieur, Band 83, Mai 2008
- [33] **Kessel, M. H., Hall, C. (2011):** *Enhanced model of the nonlinear load-bearing behaviour of wood shear walls and diaphragms*. In: Proceedings of CIB-W18, paper 44-15-6, Alghero, Italy
- [34] **Krawietz, A. (1986):** *Materialtheorie: Mathematische Beschreibung des phänomenologischen thermomechanischen Verhaltens*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg
- [35] **Márkus, G. (1967):** *Theorie und Berechnung rotationssymmetrischer Bauwerke*, 1. Auflage, Werner-Verlag, Düsseldorf

- 
- [36] **McCutcheon, W. (1985):** *Racking Deformations in Wood Shear Walls*, J. Struct. Engrg., ASCE, 111(2), 257-269
- [37] **Mehlhorn, G. (1995):** *Der Ingenieurbau: Baustatik, Baudynamik*, Ernst & Sohn, Berlin
- [38] **Mehlhorn, G. (1999):** *Der Ingenieurbau: Mathematik, Technische Mechanik*, Ernst & Sohn, Berlin
- [39] **Petersen, C. (2001):** *Stahlbau: Grundlagen der Berechnung und baulichen Ausbildung von Stahlbauten*, Vieweg
- [40] **Racher, P. (1995):** *Mechanische Holzverbindungen – Allgemeines*. In: STEP 1 [2], S. C1/1-C1/11
- [41] **Raschper, N. (1990):** *Zur Berechnung von Wandscheiben in Holztafelbauart*, Dissertation, TU Braunschweig
- [42] **Sandau-Wietfeldt, M. (2003):** *Modelle für die Tragfähigkeit von Holztafeln mit beulgefährdeter Beplankung*, Dissertation, TU Braunschweig
- [43] **Schnell, W., Czerwenka, G. (1970):** *Einführung in die Rechenmethoden des Leichtbaus*, zweiter Band, Bibliographisches Institut, Hochschultaschenbücher Verlag, Mannheim
- [44] **Schulze, H., Schönhoff, T. (1989):** *Bemessungsvorschläge für Deckenscheiben in Holzbauart mit dreiseitiger Lagerung*, Bauen mit Holz, Heft 2, S. 96-101
- [45] **Tuomi, R., McCutcheon, W. (1978):** *Racking Strength of Light-Frame Nailed Walls*, Journal of the Structural Division, ASCE, 104(7), 1131-1140
- [46] **Wunderlich, W., Kiener, G. (2004):** *Statik der Stabtragwerke*, 1. Auflage, B. G. Teubner Verlag / GWV Fachverlage GmbH, Wiesbaden
- [47] **zur Kammer, T. (2006):** *Zum räumlichen Tragverhalten mehrgeschossiger Gebäude in Holztafelbauart*, Dissertation, TU Braunschweig

## 7 Abbildungsverzeichnis

Bild 1-1:	Ansicht einer Wandtafel mit Fensteröffnung .....	1
Bild 1-2:	Explosionsdarstellung einer einseitig beplankten Wandtafel.....	2
Bild 1-3:	Überhöhte Verformungsfigur einer Wandtafel unter Horizontallast mit Berücksichtigung des Druckkontaktes der Rippen untereinander .....	3
Bild 1-4:	Vergleich der Methoden anhand der Wand aus Bild 1-1 im plastischen Grenzzustand ohne Berücksichtigung des Druckkontaktes der Rippen.....	7
Bild 1-5:	Ausschnitt einer Deckentafel mit freien Plattenrändern.....	8
Bild 1-6:	Giebelwandtafel mit nicht orthogonalen Randrippen .....	10
Bild 2-1:	Versagensmechanismen nach Johansen für Verbindungen aus Holz oder Holzwerkstoffen; aus [4] S. 143 .....	11
Bild 2-2:	Grenzzustandslinie für Biegung und Druck; aus [21][32] .....	12
Bild 3-1:	Kraft-Verschiebungs-Kurven (Versuchswerte) verschiedener Holzverbindungen nach [40] .....	21
Bild 3-2:	Kraft-Verschiebungs-Diagramm einer Lochleibungsprüfung nach EN383, aus [30] .....	22
Bild 3-3:	Kraft-Verschiebungs-Diagramme von Nägeln, aus [41].....	22
Bild 3-4:	Freigelegte, plastisch verformte Klammer in einer Gipswerkstoff-Holz-Verbindung .....	23
Bild 3-5:	Randabstand $a$ des Verbindungsmittels zum Beplankungsrand; Winkel $\phi$ zwischen Beplankungsrand und Richtung der Kraft $F$ ; aus [30].....	23
Bild 3-6:	Kraft-Verschiebungs-Diagramm für Verbindung Gipsfaserplatte und Holz mit 4 Nägeln in Abhängigkeit vom Winkel $\phi$ und Randabstand $a/d$ [30] .....	24
Bild 3-7:	Nichtlineares und vereinfachtes ideal-elastisch-plastisches Last-Verschiebungs-Diagramm eines Verbindungsmittels .....	25
Bild 3-8:	Vereinfachtes ideal-elastisch-plastisches Last-Verschiebungs-Diagramm eines Verbindungsmittels .....	26
Bild 3-9:	In Bild 3-10 betrachteter Teil der Kopfrippe in der Wandtafel aus Bild 1-1 unter einer Horizontallast $F$ .....	27
Bild 3-10:	Verbundbeanspruchungen und Schnittgrößen an einem Teil der durchlaufenden Kopfrippe einer Wandtafel .....	28
Bild 3-11:	Verbindung einer Rippe mit einer Platte durch einzelne Verbindungsmittel im Abstand $a_v$ .....	31
Bild 3-12:	Um $u_{el}$ und $w_{el}$ verschobene und um $\phi_{el}$ verdrehte Verbindung aus Bild 3-11 und daraus folgende längenbezogene elastische Verbundbeanspruchungen $s_{0,el}$ , $s_{90,el}$ und $s_{res,el}$ .....	32
Bild 3-13:	Um $u_{pl}$ und $w_{pl}$ verschobene und um $\phi_{pl}$ verdrehte Verbindung aus Bild 3-11 und daraus folgende längenbezogene plastische Verbundbeanspruchungen $s_{0,pl}$ , $s_{90,pl}$ und $s_{res,pl}$ .....	33

Bild 3-14: Beispiele für statische Modelle einer einfachen Wandtafel mit unterschiedlichen Koppel- und Lagerbedingungen.....	34
Bild 3-15: Resultierende Verbundfedersteifigkeit $C_0$ parallel zur Rippenachse .....	34
Bild 3-16: Resultierende Verbundfedersteifigkeit $C_{90}$ senkrecht zur Rippenachse.....	35
Bild 3-17: Resultierende Drehfedersteifigkeit $C_\varphi$ .....	35
Bild 3-18: Maximale Verbindungsmittelverschiebung $u_{\max}$ infolge einer Verdrehung $\varphi=1^\circ$ ..	36
Bild 3-19: Beispiel für das vereinfachte Stabmodell einer Wandtafel mit 12 Verbindungen, die durch je drei resultierende Federsteifigkeiten modelliert werden .....	38
Bild 3-20: Tafel mit vier starren Rippen, die nicht miteinander verbunden sind, und einer starren Platte, die kontinuierlich mit den Rippen verbunden ist (ideales Schubfeld) .....	41
Bild 3-21: Modellierung der Tafel aus Bild 3-20 .....	42
Bild 3-22: Freigeschnittene Verbundbeanspruchungen der Tafel aus Bild 3-20 sowohl im elastischen als auch im plastischen Grenzzustand .....	43
Bild 3-23: Tafel mit vier starren Rippen, die gelenkig miteinander verbunden sind, und einer starren Platte, die kontinuierlich mit den Rippen verbunden ist .....	43
Bild 3-24: Modellierung der Tafel aus Bild 3-23 .....	44
Bild 3-25: Freigeschnittene Verbundbeanspruchungen und Gelenkkräfte der Tafel aus Bild 3-24 mit elastischem Verbund.....	46
Bild 3-26: Tafel ohne Zugverankerung der vertikalen Rippen.....	47
Bild 3-27: Modellierung der Tafel aus Bild 3-26 .....	48
Bild 3-28: Freigeschnittene Verbundbeanspruchungen der Tafel aus Bild 3-27 mit elastischem Verbund .....	50
Bild 3-29: $S_0$ - $S_{90}$ - $M_\varphi$ -Fließfläche .....	54
Bild 3-30: $S_0$ - $S_{90}$ - $M_\varphi$ -Interaktionsnomogramm .....	55
Bild 3-31: Verschiebungszustände infolge a) $\delta u$ , b) $\delta\varphi$ und c) einer Kombination aus $\delta u$ und $\delta\varphi$ .....	56
Bild 3-32: Virtueller Verschiebungszustand der Rippen zur Bestimmung der plastischen Grenzlast $F_{pl}$ mit dem P.v.V. ....	59
Bild 3-33: Freigeschnittene Verbundbeanspruchungen der Tafel aus Bild 3-24 mit plastischem Verbund .....	60
Bild 3-34: Gleichgewicht an der freigeschnittenen Platte der Tafel aus Bild 3-26 im plastischen Grenzzustand .....	62
Bild 3-35: Einfaches statisches Modell für die Wandtafel aus Bild 1-1 mit starren Rippen und starrer Beplankung .....	66
Bild 3-36: Lokale kinematische Ketten (b-e) und kombinierte kinematische Kette im plastischen Grenzzustand (f) des statischen Modells der Wandtafel aus Bild 1-1 ohne Längssteifigkeit der Platten .....	68

Bild 3-37: Gleichgewichtszustand an den freigeschnittenen starren Körpern des statischen Modells aus Bild 3-36f, der auch den Ergebnissen der Schubfeldmethode entspricht .....	70
Bild 4-1: Auseinandergezogene Darstellung der Wandtafel aus Bild 1-1 .....	73
Bild 4-2: VR- und VRV-Elemente zur Modellierung der Rippen und ihrer Verbindungen zu den Platten in der Wandtafel aus Bild 4-1 .....	74
Bild 4-3: VR-Element zur Modellierung einer Rippe und ihrer Verbindung zu einem starren Plattenrand .....	77
Bild 4-4: Superposition von Verschiebungszuständen im VR-Element .....	82
Bild 4-5: Einheitsverformungszustände im VR-Element .....	84
Bild 4-6: VR-Element a) im elastischen Grenzzustand, b) mit einem plastischen Verbundbereich, c) mit vier plastischen Verbundbereichen .....	90
Bild 4-7: Lineare Abhängigkeit der Verschiebung des Bereichsknotens j von den Verschiebungen der Nachbarknoten .....	93
Bild 4-8: Plastischer Verbundbereich; a) mittlere Relativverschiebung zwischen Rippe und Plattenrand; b) Ersatzlastgruppe mit konstanten Linienlasten; c) Ersatzlastgruppe mit Knotenlasten .....	95
Bild 4-9: VRV-Element zur Modellierung einer Rippe und ihrer Verbindung zu zwei starren Plattenrändern .....	97
Bild 4-10: Superposition von Verschiebungszuständen im VRV-Element .....	99
Bild 4-11: Einheitsverformungszustände der Knoten A, B, C und D im VRV-Element .....	101
Bild 4-12: Einheitsverformungszustände der Knoten E und F im VRV-Element .....	102
Bild 4-13: Beschreibung der Beplankungselemente durch die starre Kopplung ihrer Eckknoten .....	105
Bild 4-14: Verschiebungen des Knotens 2 infolge einer Verdrehung des starr gekoppelten Knotens 1 .....	106
Bild 4-15: Federelement zur Modellierung des Druckkontaktes zwischen zwei Knoten ....	108
Bild 4-16: Kraft-Verschiebungs-Diagramm des Druckkontaktelements .....	109
Bild 4-17: Durch Fertigungstoleranzen bedingte Fuge zwischen der vertikalen Randrippe und der Fußrippe einer Wandtafel .....	109
Bild 4-18: Kraft-Verschiebungs-Diagramm des Zugverankerungselements .....	110
Bild 4-19: Prandtl-Element zur Modellierung eines ideal-elastisch-plastischen Verhaltens der Zugverankerung .....	111
Bild 4-20: Programmablaufplan zur iterativen numerischen Berechnung des plastischen Grenzzustandes von Holztafeln .....	114
Bild 4-21: Statisches Modell der Tafel mit Belastung F, Knotennummerierung (schwarz) und Elementnummerierung (rot) .....	116
Bild 4-22: Kopfverschiebung der Tafel aus Bild 4-21 in Abhängigkeit von der Last F .....	117
Bild 4-23: Belastung in [kN], Auflagerreaktionen (grün) in [kN] und Verschiebungen (100-fach überhöht) in [mm] der Tafel im a) elastischen und b) plastischen Grenzzustand der Tragfähigkeit .....	118

Bild 4-24:	Normalkraftverläufe [kN] in den Rippen der Tafel im a) elastischen und b) plastischen Grenzzustand der Tragfähigkeit .....	119
Bild 4-25:	Verbundbeanspruchungen der Tafel als ideales Schubfeld.....	120
Bild 4-26:	Statisches Modell der Tafel mit gelenkig verbundenen Rippen mit Belastung F, Knotennummerierung (schwarz) und Elementnummerierung (rot).....	121
Bild 4-27:	Kopfverschiebung der Tafel aus Bild 4-26 in Abhängigkeit von der Last F .....	122
Bild 4-28:	Belastung in [kN], Auflagerreaktionen (grün) in [kN] und Verschiebungen (100-fach überhöht) in [mm] der Tafel im a) elastischen und b) plastischen Grenzzustand der Tragfähigkeit .....	122
Bild 4-29:	Normalkraftverläufe [kN] in den Rippen der Tafel im a) elastischen und b) plastischen Grenzzustand der Tragfähigkeit .....	123
Bild 4-30:	Verbundbeanspruchungen der Tafel mit gelenkig verbundenen Rippen .....	124
Bild 4-31:	Statisches Modell der Tafel ohne Zugverankerung mit Belastung, Knotennummerierung (schwarz) und Elementnummerierung (rot) .....	125
Bild 4-32:	Kopfverschiebung der Tafel aus Bild 4-31 in Abhängigkeit von der Last F .....	126
Bild 4-33:	Belastung in [kN], Auflagerreaktionen (grün) in [kN] und Verschiebungen (100-fach überhöht) in [mm] der Tafel ohne Zugverankerung im a) elastischen und b) plastischen Grenzzustand der Tragfähigkeit .....	126
Bild 4-34:	Normalkraftverläufe [kN] in den Rippen der Tafel ohne Zugverankerung im a) elastischen und b) plastischen Grenzzustand der Tragfähigkeit .....	127
Bild 4-35:	Verbundbeanspruchungen der Tafel ohne Zugverankerung .....	128
Bild 4-36:	Übersicht der Ergebnisse der Beispiele aus den Kapiteln 3 und 4 .....	129
Bild 4-37:	Kopfverschiebungen der Tafeln der Beispiele 1 bis 3 in Abhängigkeit von der Last F .....	130
Bild D-1:	Tafel mit vier starren Rippen, die nicht miteinander verbunden sind, und einer starren Platte (ideales Schubfeld) .....	D-1
Bild D-2:	Modellierung der Tafel aus Bild D-1 .....	D-2
Bild D-3:	Freigeschnittene Verbundbeanspruchungen der Tafel aus Bild D-1 im elastischen und plastischen Grenzzustand.....	D-8
Bild E-1:	Tafel mit vier starren Rippen, die gelenkig miteinander verbunden sind, und einer starren Platte .....	E-1
Bild E-2:	Tafel mit vier starren Rippen, die gelenkig miteinander verbunden sind, und einer starren Platte .....	E-2
Bild E-3:	Freigeschnittene Verbundbeanspruchungen und Gelenkkkräfte der Tafel aus Bild E-2 mit elastischem Verbund .....	E-6
Bild F-1:	Tafel ohne Zugverankerung der vertikalen Rippen.....	F-1
Bild F-2:	Modellierung der Tafel aus Bild F-1 .....	F-2
Bild F-3:	Freigeschnittene Verbundbeanspruchungen der Tafel aus Bild F-2 mit elastischem Verbund .....	F-7



## Anhang A - Formfunktionen des VR- und des VRV-Elements

### VR-Element parallel zur Rippenachse:

#### Formfunktionen für die Verschiebungen der Rippe (Bild 4-5)

$$u_{\text{Ri},u,A} = 1 - \frac{x}{l} - \frac{\sinh(\lambda(l-x))}{\sinh(\lambda l)}$$

$$u_{\text{Ri},u,B} = \frac{x}{l} - \frac{\sinh(\lambda x)}{\sinh(\lambda l)}$$

$$u_{\text{Ri},u,C} = \frac{\sinh(\lambda(l-x))}{\sinh(\lambda l)}$$

$$u_{\text{Ri},u,D} = \frac{\sinh(\lambda x)}{\sinh(\lambda l)}$$

$$\text{mit } \lambda = \sqrt{\frac{k}{EA}}$$

#### Formfunktionen für die Dehnung der Rippe

$$u'_{\text{Ri},u,A} = \frac{\lambda \cosh(\lambda(l-x))}{\sinh(\lambda l)} - \frac{1}{l}$$

$$u'_{\text{Ri},u,B} = \frac{1}{l} - \frac{\lambda \cosh(\lambda x)}{\sinh(\lambda l)}$$

$$u'_{\text{Ri},u,C} = -\frac{\lambda \cosh(\lambda(l-x))}{\sinh(\lambda l)}$$

$$u'_{\text{Ri},u,D} = \frac{\lambda \cosh(\lambda x)}{\sinh(\lambda l)}$$

#### Formfunktionen für die Verschiebungen des Plattenrandes (Bild 4-5)

$$u_{\text{Pl},u,A} = 1 - \frac{x}{l}$$

$$u_{\text{Pl},u,B} = \frac{x}{l}$$

**VR-Element senkrecht zur Rippenachse:****Formfunktionen für die Verschiebungen der Rippe (Bild 4-5)**

$$w_{\text{Ri},w,A} = 1 - \frac{x}{l} - \frac{\theta}{a l (\cos(2 a l) + \cosh(2 a l) - 2)}$$

$$w_{\text{Ri},w,B} = \frac{x}{l} - \frac{\vartheta}{a l (\cos(2 a l) + \cosh(2 a l) - 2)}$$

$$w_{\text{Ri},w,C} = \frac{\cos(\varepsilon) \cosh(a x) + \cosh(\varepsilon) \cos(a x) - 2 \cos(a x) \cosh(a x) - \sin(\varepsilon) \sinh(a x) + \sinh(\varepsilon) \sin(a x)}{\cos(2 a l) + \cosh(2 a l) - 2}$$

$$w_{\text{Ri},\varphi,C} = \frac{\cos(\varepsilon) \sinh(a x) + \cosh(\varepsilon) \sin(a x) - \cos(a x) \sinh(a x) - \cosh(a x) \sin(a x)}{a (\cos(2 a l) + \cosh(2 a l) - 2)}$$

$$w_{\text{Ri},w,D} = \frac{\cos(\beta) \cosh(\gamma) + \cosh(\beta) \cos(\gamma) - 2 \cos(\gamma) \cosh(\gamma) - \sin(\beta) \sinh(\gamma) + \sinh(\beta) \sin(\gamma)}{\cos(2 a l) + \cosh(2 a l) - 2}$$

$$w_{\text{Ri},\varphi,D} = - \frac{\cos(\beta) \sinh(\gamma) + \cosh(\beta) \sin(\gamma) - \cos(\gamma) \sinh(\gamma) - \cosh(\gamma) \sin(\gamma)}{a (\cos(2 a l) + \cosh(2 a l) - 2)}$$

mit

$$\begin{aligned} \theta = & \cos(\beta) \sinh(\gamma) + \cosh(\beta) \sin(\gamma) - \cos(\gamma) \sinh(\gamma) - \cosh(\gamma) \sin(\gamma) - \cos(\varepsilon) \sinh(a x) \\ & - \cosh(\varepsilon) \sin(a x) + \cos(a x) \sinh(a x) + \cosh(a x) \sin(a x) + a l \cos(\varepsilon) \cosh(a x) \\ & + a l \cosh(\varepsilon) \cos(a x) - 2 a l \cos(a x) \cosh(a x) - a l \sin(\varepsilon) \sinh(a x) + a l \sinh(\varepsilon) \sin(a x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vartheta = & \cos(\gamma) \sinh(\gamma) - \cosh(\beta) \sin(\gamma) - \cos(\beta) \sinh(\gamma) + \cosh(\gamma) \sin(\gamma) + \cos(\varepsilon) \sinh(a x) \\ & + \cosh(\varepsilon) \sin(a x) - \cos(a x) \sinh(a x) - \cosh(a x) \sin(a x) + a l \cos(\beta) \cosh(\gamma) \\ & + a l \cosh(\beta) \cos(\gamma) - 2 a l \cos(\gamma) \cosh(\gamma) - a l \sin(\beta) \sinh(\gamma) + a l \sinh(\beta) \sin(\gamma) \end{aligned}$$

$$\beta = a (l + x); \quad \gamma = a (l - x); \quad \varepsilon = a (2l - x); \quad a = \sqrt[4]{\frac{k}{4EI}}$$

**Formfunktionen für die Krümmung der Rippe**

$$w''_{\text{Ri},w,A} = -\frac{2\delta a}{l(\cos(2al) + \cosh(2al) - 2)}$$

$$w''_{\text{Ri},w,B} = -\frac{2\zeta a}{l(\cos(2al) + \cosh(2al) - 2)}$$

$$w''_{\text{Ri},w,C} = \frac{2a^2(\cos(\varepsilon)\cosh(ax) - \cosh(\varepsilon)\cos(ax) + \sin(\varepsilon)\sinh(ax) + \sinh(\varepsilon)\sin(ax) + 2\sin(ax)\sinh(ax))}{\cos(2al) + \cosh(2al) - 2}$$

$$w''_{\text{Ri},\varphi,C} = \frac{2a(\sin(\varepsilon)\cosh(ax) - \sinh(\varepsilon)\cos(ax) - \cos(ax)\sinh(ax) + \cosh(ax)\sin(ax))}{\cos(2al) + \cosh(2al) - 2}$$

$$w''_{\text{Ri},w,D} = \frac{2a^2(\cos(\beta)\cosh(\gamma) - \cosh(\beta)\cos(\gamma) + \sin(\beta)\sinh(\gamma) + \sinh(\beta)\sin(\gamma) + 2\sin(\gamma)\sinh(\gamma))}{\cos(2al) + \cosh(2al) - 2}$$

$$w''_{\text{Ri},\varphi,D} = \frac{2a(\cos(\gamma)\sinh(\beta) - \cosh(\gamma)\sin(\beta) + \cos(\gamma)\sinh(\gamma) - \cosh(\gamma)\sin(\gamma))}{\cos(2al) + \cosh(2al) - 2}$$

mit

$$\begin{aligned}\delta = & \cosh(\gamma)\sin(\beta) - \cos(\gamma)\sinh(\beta) - \cos(\gamma)\sinh(\gamma) + \cosh(\gamma)\sin(\gamma) - \sin(\varepsilon)\cosh(ax) \\ & + \sinh(\varepsilon)\cos(ax) + \cos(ax)\sinh(ax) - \cosh(ax)\sin(ax) + al\cos(\varepsilon)\cosh(ax) \\ & - al\cosh(\varepsilon)\cos(ax) + al\sin(\varepsilon)\sinh(ax) + al\sinh(\varepsilon)\sin(ax) + 2al\sin(ax)\sinh(ax)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\zeta = & \cos(\gamma)\sinh(\beta) - \cosh(\gamma)\sin(\beta) + \cos(\gamma)\sinh(\gamma) - \cosh(\gamma)\sin(\gamma) + \sin(\varepsilon)\cosh(ax) \\ & - \sinh(\varepsilon)\cos(ax) - \cos(ax)\sinh(ax) + \cosh(ax)\sin(ax) + al\cos(\beta)\cosh(\gamma) \\ & - al\cosh(\beta)\cos(\gamma) + al\sin(\beta)\sinh(\gamma) + al\sinh(\beta)\sin(\gamma) + 2al\sin(\gamma)\sinh(\gamma)\end{aligned}$$

$$\beta = a(l+x); \quad \gamma = a(l-x); \quad \varepsilon = a(2l-x); \quad a = \sqrt[4]{\frac{k}{4EI}}$$

**Formfunktionen für die Verschiebungen des Plattenrandes (Bild 4-5)**

$$w_{\text{Pl},w,A} = 1 - \frac{x}{l}$$

$$w_{\text{Pl},w,B} = \frac{x}{l}$$

**VRV-Element parallel zur Rippenachse:****Formfunktionen für die Verschiebungen der Rippe (Bild 4-11 u. Bild 4-12)**

$$u_{\text{Ri},u,A} = \frac{k_1}{k_1 + k_2} \left( 1 - \frac{x}{l} - \frac{\sinh(\lambda(l-x))}{\sinh(\lambda l)} \right)$$

$$u_{\text{Ri},u,B} = \frac{k_1}{k_1 + k_2} \left( \frac{x}{l} - \frac{\sinh(\lambda x)}{\sinh(\lambda l)} \right)$$

$$u_{\text{Ri},u,C} = \frac{\sinh(\lambda(l-x))}{\sinh(\lambda l)}$$

$$u_{\text{Ri},u,D} = \frac{\sinh(\lambda x)}{\sinh(\lambda l)}$$

$$u_{\text{Ri},u,E} = \frac{k_2}{k_1 + k_2} \left( 1 - \frac{x}{l} - \frac{\sinh(\lambda(l-x))}{\sinh(\lambda l)} \right)$$

$$u_{\text{Ri},u,F} = \frac{k_2}{k_1 + k_2} \left( \frac{x}{l} - \frac{\sinh(\lambda x)}{\sinh(\lambda l)} \right)$$

$$\text{mit } \lambda = \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{EA}}$$

**Formfunktionen für die Dehnung der Rippe**

$$u'_{\text{Ri},u,A} = \frac{k_1}{k_1 + k_2} \left( \frac{\lambda \cosh(\lambda(l-x))}{\sinh(\lambda l)} - \frac{1}{l} \right)$$

$$u'_{\text{Ri},u,B} = \frac{k_1}{k_1 + k_2} \left( \frac{1}{l} - \frac{\lambda \cosh(\lambda x)}{\sinh(\lambda l)} \right)$$

$$u'_{\text{Ri},u,C} = -\frac{\lambda \cosh(\lambda(l-x))}{\sinh(\lambda l)}$$

$$u'_{\text{Ri},u,D} = \frac{\lambda \cosh(\lambda x)}{\sinh(\lambda l)}$$

$$u'_{\text{Ri},u,E} = \frac{k_2}{k_1 + k_2} \left( \frac{\lambda \cosh(\lambda(l-x))}{\sinh(\lambda l)} - \frac{1}{l} \right)$$

$$u'_{\text{Ri},u,F} = \frac{k_2}{k_1 + k_2} \left( \frac{1}{l} - \frac{\lambda \cosh(\lambda x)}{\sinh(\lambda l)} \right)$$

$$\text{mit } \lambda = \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{EA}}$$

## Formfunktionen für die Verschiebungen des Plattenrandes (Bild 4-11 u. Bild 4-12)

$$u_{P1,u,A} = u_{P2,u,E} = 1 - \frac{x}{l}$$

$$u_{P1,u,B} = u_{P2,u,F} = \frac{x}{l}$$

### VRV-Element senkrecht zur Rippenachse:

## Formfunktionen für die Verschiebungen der Rippe (Bild 4-11 u. Bild 4-12)

$$w_{Ri,w,A} = \frac{k_1}{k_1 + k_2} \left( 1 - \frac{x}{l} - \frac{\theta}{a l (\cos(2 a l) + \cosh(2 a l) - 2)} \right)$$

$$w_{Ri,w,B} = \frac{k_1}{k_1 + k_2} \left( \frac{x}{l} - \frac{\vartheta}{a l (\cos(2 a l) + \cosh(2 a l) - 2)} \right)$$

$$w_{Ri,w,C} = \frac{\cos(\varepsilon) \cosh(a x) + \cosh(\varepsilon) \cos(a x) - 2 \cos(a x) \cosh(a x) - \sin(\varepsilon) \sinh(a x) + \sinh(\varepsilon) \sin(a x)}{\cos(2 a l) + \cosh(2 a l) - 2}$$

$$w_{Ri,\varphi,C} = \frac{\cos(\varepsilon) \sinh(a x) + \cosh(\varepsilon) \sin(a x) - \cos(a x) \sinh(a x) - \cosh(a x) \sin(a x)}{a (\cos(2 a l) + \cosh(2 a l) - 2)}$$

$$w_{Ri,w,D} = \frac{\cos(\beta) \cosh(\gamma) + \cosh(\beta) \cos(\gamma) - 2 \cos(\gamma) \cosh(\gamma) - \sin(\beta) \sinh(\gamma) + \sinh(\beta) \sin(\gamma)}{\cos(2 a l) + \cosh(2 a l) - 2}$$

$$w_{Ri,\varphi,D} = - \frac{\cos(\beta) \sinh(\gamma) + \cosh(\beta) \sin(\gamma) - \cos(\gamma) \sinh(\gamma) - \cosh(\gamma) \sin(\gamma)}{a (\cos(2 a l) + \cosh(2 a l) - 2)}$$

$$w_{Ri,w,E} = \frac{k_2}{k_1 + k_2} \left( 1 - \frac{x}{l} - \frac{\theta}{a l (\cos(2 a l) + \cosh(2 a l) - 2)} \right)$$

$$w_{Ri,w,F} = \frac{k_2}{k_1 + k_2} \left( \frac{x}{l} - \frac{\vartheta}{a l (\cos(2 a l) + \cosh(2 a l) - 2)} \right)$$

mit

$$\begin{aligned} \theta = & \cos(\beta) \sinh(\gamma) + \cosh(\beta) \sin(\gamma) - \cos(\gamma) \sinh(\gamma) - \cosh(\gamma) \sin(\gamma) - \cos(\varepsilon) \sinh(a x) \\ & - \cosh(\varepsilon) \sin(a x) + \cos(a x) \sinh(a x) + \cosh(a x) \sin(a x) + a l \cos(\varepsilon) \cosh(a x) \\ & + a l \cosh(\varepsilon) \cos(a x) - 2 a l \cos(a x) \cosh(a x) - a l \sin(\varepsilon) \sinh(a x) + a l \sinh(\varepsilon) \sin(a x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vartheta = & \cos(\gamma) \sinh(\gamma) - \cosh(\beta) \sin(\gamma) - \cos(\beta) \sinh(\gamma) + \cosh(\gamma) \sin(\gamma) + \cos(\varepsilon) \sinh(a x) \\ & + \cosh(\varepsilon) \sin(a x) - \cos(a x) \sinh(a x) - \cosh(a x) \sin(a x) + a l \cos(\beta) \cosh(\gamma) \\ & + a l \cosh(\beta) \cos(\gamma) - 2 a l \cos(\gamma) \cosh(\gamma) - a l \sin(\beta) \sinh(\gamma) + a l \sinh(\beta) \sin(\gamma) \end{aligned}$$

$$\beta = a (l + x) ; \quad \gamma = a (l - x) ; \quad \varepsilon = a (2 l - x) ; \quad a = \sqrt[4]{\frac{k_1 + k_2}{4 E I}}$$

### Formfunktionen für die Krümmung der Rippe

$$w''_{\text{Ri},w,A} = -\frac{2 \delta a k_1}{l (k_1 + k_2) (\cos(2 a l) + \cosh(2 a l) - 2)}$$

$$w''_{\text{Ri},w,B} = -\frac{2 \zeta a k_1}{l (k_1 + k_2) (\cos(2 a l) + \cosh(2 a l) - 2)}$$

$$w''_{\text{Ri},w,C} = \frac{2 a^2 (\cos(\varepsilon) \cosh(a x) - \cosh(\varepsilon) \cos(a x) + \sin(\varepsilon) \sinh(a x) + \sinh(\varepsilon) \sin(a x) + 2 \sin(a x) \sinh(a x))}{\cos(2 a l) + \cosh(2 a l) - 2}$$

$$w''_{\text{Ri},\varphi,C} = \frac{2 a (\sin(\varepsilon) \cosh(a x) - \sinh(\varepsilon) \cos(a x) - \cos(a x) \sinh(a x) + \cosh(a x) \sin(a x))}{\cos(2 a l) + \cosh(2 a l) - 2}$$

$$w''_{\text{Ri},w,D} = \frac{2 a^2 (\cos(\beta) \cosh(\gamma) - \cosh(\beta) \cos(\gamma) + \sin(\beta) \sinh(\gamma) + \sinh(\beta) \sin(\gamma) + 2 \sin(\gamma) \sinh(\gamma))}{\cos(2 a l) + \cosh(2 a l) - 2}$$

$$w''_{\text{Ri},\varphi,D} = \frac{2 a (\cos(\gamma) \sinh(\beta) - \cosh(\gamma) \sin(\beta) + \cos(\gamma) \sinh(\gamma) - \cosh(\gamma) \sin(\gamma))}{\cos(2 a l) + \cosh(2 a l) - 2}$$

$$w''_{\text{Ri},w,E} = -\frac{2 \delta a k_2}{l (k_1 + k_2) (\cos(2 a l) + \cosh(2 a l) - 2)}$$

$$w''_{\text{Ri},w,F} = -\frac{2 \zeta a k_2}{l (k_1 + k_2) (\cos(2 a l) + \cosh(2 a l) - 2)}$$

mit

$$\begin{aligned} \delta = & \cosh(\gamma) \sin(\beta) - \cos(\gamma) \sinh(\beta) - \cos(\gamma) \sinh(\gamma) + \cosh(\gamma) \sin(\gamma) - \sin(\varepsilon) \cosh(a x) \\ & + \sinh(\varepsilon) \cos(a x) + \cos(a x) \sinh(a x) - \cosh(a x) \sin(a x) + a l \cos(\varepsilon) \cosh(a x) \\ & - a l \cosh(\varepsilon) \cos(a x) + a l \sin(\varepsilon) \sinh(a x) + a l \sinh(\varepsilon) \sin(a x) + 2 a l \sin(a x) \sinh(a x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \zeta = & \cos(\gamma) \sinh(\beta) - \cosh(\gamma) \sin(\beta) + \cos(\gamma) \sinh(\gamma) - \cosh(\gamma) \sin(\gamma) + \sin(\varepsilon) \cosh(a x) \\ & - \sinh(\varepsilon) \cos(a x) - \cos(a x) \sinh(a x) + \cosh(a x) \sin(a x) + a l \cos(\beta) \cosh(\gamma) \\ & - a l \cosh(\beta) \cos(\gamma) + a l \sin(\beta) \sinh(\gamma) + a l \sinh(\beta) \sin(\gamma) + 2 a l \sin(\gamma) \sinh(\gamma) \end{aligned}$$

$$\beta = a (l + x); \quad \gamma = a (l - x); \quad \varepsilon = a (2 l - x); \quad a = \sqrt[4]{\frac{k_1 + k_2}{4 \text{EI}}}$$

### Formfunktionen für die Verschiebungen des Plattenrandes (Bild 4-11 u. Bild 4-12)

$$w_{\text{P1},w,A} = w_{\text{P2},w,E} = 1 - \frac{x}{l}$$

$$w_{\text{P1},w,B} = w_{\text{P2},w,F} = \frac{x}{l}$$

## Anhang B - Steifigkeitsmatrix des VR-Elements

Die Steifigkeitsmatrix  $K_{VR}$  des VR-Elements stellt die Beziehung zwischen den Kraftgrößen  $P_{VR}$  und den Weggrößen  $V_{VR}$  an den Elementrändern her:

$$P_{VR} = K_{VR} \cdot V_{VR}$$

Der Vektor  $P_{VR}$  enthält sämtliche Kraftgrößen an den Elementrändern (vgl. Bild 4-9), während der Vektor  $V_{VR}$  alle 10 Knotenweggrößen beinhaltet:

$$P_{VR} = \begin{pmatrix} N_A \\ Q_A \\ N_B \\ Q_B \\ N_C \\ Q_C \\ M_C \\ N_D \\ Q_D \\ M_D \end{pmatrix} \quad V_{VR} = \begin{pmatrix} u_A \\ w_A \\ u_B \\ w_B \\ u_C \\ w_C \\ \varphi_C \\ u_D \\ w_D \\ \varphi_D \end{pmatrix}$$

Die vollständige Steifigkeitsmatrix  $K_{VR}$  ist auf der folgenden Doppelseite dargestellt.

$$K_{VR} = \begin{pmatrix} \Lambda EA - \frac{EA}{L} & 0 & \frac{EA}{L} - \Upsilon EA & 0 & \frac{EA}{L} - \Lambda EA & 0 \\ 0 & -\frac{\alpha k}{\xi m n^2} & 0 & -\frac{\beta k}{\xi m n^2} & 0 & -\frac{\gamma k}{2 \xi m n} \\ \frac{EA}{L} - \Upsilon EA & 0 & \Lambda EA - \frac{EA}{L} & 0 & \Upsilon EA - \frac{EA}{L} & 0 \\ 0 & -\frac{\beta k}{\xi m n^2} & 0 & -\frac{\alpha k}{\xi m n^2} & 0 & \frac{\delta k}{2 \xi m n} \\ \frac{EA}{L} - \Lambda EA & 0 & \Upsilon EA - \frac{EA}{L} & 0 & \Lambda EA & 0 \\ 0 & -\frac{\gamma k}{2 \xi m n} & 0 & \frac{\delta k}{2 \xi m n} & 0 & \frac{\eta \xi^3 EI}{m^2} + \frac{\zeta k}{8 \xi m^2} \\ 0 & -\frac{\epsilon k}{\xi^2 m n} & 0 & \frac{\epsilon k}{\xi^2 m n} & 0 & \frac{\vartheta \xi^2 EI}{2 m^2} + \frac{\theta k}{8 \xi^2 m^2} \\ \Upsilon EA - \frac{EA}{L} & 0 & \frac{EA}{L} - \Lambda EA & 0 & -\Upsilon EA & 0 \\ 0 & \frac{\delta k}{2 \xi m n} & 0 & -\frac{\gamma k}{2 \xi m n} & 0 & -\frac{\kappa \xi^3 EI}{m^2} - \frac{\iota k}{4 \xi m^2} \\ 0 & -\frac{\epsilon k}{\xi^2 m n} & 0 & \frac{\epsilon k}{\xi^2 m n} & 0 & \frac{\nu \xi^2 EI}{m^2} - \frac{\mu k}{4 \xi^2 m^2} \end{pmatrix}$$

$$\lambda = \sqrt{\frac{k}{EA}}$$

$$\Lambda = \lambda \coth(\lambda l)$$

$$\Upsilon = \frac{\lambda}{\sinh(\lambda l)}$$

$$a = \sqrt[4]{\frac{k}{4EI}}$$

$$n = al$$

$$m = \cos(2n) + \cosh(2n) - 2$$

$$\alpha = \sin(2n) - \sinh(2n) + 2 \cos(n) \sinh(n) - 2 \cosh(n) \sin(n) \\ + n (\cosh(2n) + 4 \sin(n) \sinh(n) - n (\sin(2n) + \sinh(2n))) - n \cos(2n)$$

$$\beta = \sinh(2n) - \sin(2n) + 2 \sinh(n) (\cos(n) (n^2 - 1) - 2n \sin(n)) + n \cos(2n) \\ - n \cosh(2n) + 2 \cosh(n) \sin(n) (n^2 + 1)$$

$$\gamma = \cos(2n) - \cosh(2n) + 2n \sin(2n) + 2n \sinh(2n) - 4 \sin(n) \sinh(n)$$

$$\delta = \cos(2n) - \cosh(2n) - 4 \sinh(n) (\sin(n) - n \cos(n)) + 4n \cosh(n) \sin(n)$$

$$\epsilon = (\cos(n) - \cosh(n)) (\sin(n) + \sinh(n) - n \cos(n) - n \cosh(n))$$

$$\epsilon = \frac{\sin(2n)}{2} + \sinh(n) (\cos(n) + 2n \sin(n)) - \cosh(n) (\sin(n) + \sinh(n))$$

$$\zeta = 6 \cosh(2n) (\sin(2n) + \sinh(2n)) - 32n \sin(n)^2 \sinh(n)^2 + 6 (\cos(2n) - 2) (\sin(2n) + \sinh(2n))$$

$$\eta = 16n \sin(n)^2 \sinh(n)^2 + \cosh(2n) (\sin(2n) + \sinh(2n)) + (\cos(2n) - 2) (\sin(2n) + \sinh(2n))$$

$$\theta = 8n \sin(2n) \sinh(n)^2 - 8n \sinh(2n) \sin(n)^2 + 4 \cos(2n) - \cos(4n) - 4 \cosh(2n) + \cosh(4n)$$

$$\iota = 3 \cosh(n) (\sin(3n) - 4 \sin(n)) + \sinh(n) (3 \cos(3n) - 12 \cos(n) + 2n \sin(3n)) \\ + 3 \cosh(3n) \sin(n) + \sinh(3n) (3 \cos(n) - 2n \sin(n))$$

$$\kappa = \cosh(n) (\sin(3n) - 4 \sin(n)) - \sinh(n) (4 \cos(n) - \cos(3n) + 2n \sin(3n)) \\ + \cosh(3n) \sin(n) + \sinh(3n) (\cos(n) + 2n \sin(n))$$



$$\begin{pmatrix}
0 & \Upsilon EA - \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\
-\frac{\epsilon k}{\xi^2 m n} & 0 & \frac{\delta k}{2 \xi m n} & -\frac{\varepsilon k}{\xi^2 m n} \\
0 & \frac{EA}{L} - \Lambda EA & 0 & 0 \\
\frac{\epsilon k}{\xi^2 m n} & 0 & -\frac{\gamma k}{2 \xi m n} & \frac{\epsilon k}{\xi^2 m n} \\
0 & -\Upsilon EA & 0 & 0 \\
\frac{\vartheta \xi^2 EI}{2 m^2} + \frac{\theta k}{8 \xi^2 m^2} & 0 & -\frac{\kappa \xi^3 EI}{m^2} - \frac{\iota k}{4 \xi m^2} & \frac{\nu \xi^2 EI}{m^2} - \frac{\mu k}{4 \xi^2 m^2} \\
\frac{o k}{16 \xi^3 m^2} + \frac{\varpi \xi EI}{4 m^2} & 0 & \frac{\mu k}{4 \xi^2 m^2} - \frac{\nu \xi^2 EI}{m^2} & \frac{\sigma \xi EI}{2 m^2} - \frac{\rho k}{8 \xi^3 m^2} \\
0 & \Lambda EA & 0 & 0 \\
\frac{\mu k}{4 \xi^2 m^2} - \frac{\nu \xi^2 EI}{m^2} & 0 & \frac{\eta \xi^3 EI}{m^2} + \frac{\zeta k}{8 \xi m^2} & -\frac{\vartheta \xi^2 EI}{2 m^2} - \frac{\theta k}{8 \xi^2 m^2} \\
\frac{\sigma \xi EI}{2 m^2} - \frac{\rho k}{8 \xi^3 m^2} & 0 & -\frac{\vartheta \xi^2 EI}{2 m^2} - \frac{\theta k}{8 \xi^2 m^2} & \frac{o k}{16 \xi^3 m^2} + \frac{\varpi \xi EI}{4 m^2}
\end{pmatrix}$$

$$\mu = \sinh(n) (12 \sin(n) - 2 \sin(3n) + 2n \cos(n) + n \cos(3n))$$

$$- \sinh(3n) (2 \sin(n) + n \cos(n)) - n \cosh(n) (\sin(3n) - 2 \sin(n)) + n \cosh(3n) \sin(n)$$

$$\nu = \sinh(n) (2 \sin(3n) - 12 \sin(n) + n (\cos(3n) + 2 \cos(n)))$$

$$+ \sinh(3n) (2 \sin(n) - n \cos(n)) - n \cosh(n) (\sin(3n) - 2 \sin(n)) + n \cosh(3n) \sin(n)$$

$$o = 4 \sin(2n) - \sin(4n) + \sinh(4n) + 2 \sinh(2n) (\cos(2n) + 4n \sin(2n) - 2)$$

$$- 2 \cosh(2n) (4n + \sin(2n)) + 8n \cos(2n)$$

$$\varpi = 12 \sin(2n) - 3 \sin(4n) + 3 \sinh(4n) + \cosh(2n) (8n - 6 \sin(2n))$$

$$- 2 \sinh(2n) (4n \sin(2n) - 3 \cos(2n) + 6) - 8n \cos(2n)$$

$$\rho = \cosh(n) (4 \sin(n) - \sin(3n) + 2n \cos(3n)) - \cosh(3n) (\sin(n) + 2n \cos(n))$$

$$+ \sinh(n) (\cos(3n) + \cos(n) (2 \cosh(2n) - 3) + 16n \sin(n))$$

$$\sigma = \sinh(n) (12 \cos(n) - 3 \cos(3n) + 16n \sin(n)) + \cosh(n) (3 \sin(3n) - 12 \sin(n) + 2n \cos(3n))$$

$$- 3 \sinh(3n) \cos(n) + \cosh(3n) (3 \sin(n) - 2n \cos(n))$$



## Anhang C - Steifigkeitsmatrix des VRV-Elements

Die Steifigkeitsmatrix  $K_{VRV}$  des VRV-Elements stellt die Beziehung zwischen den Kraftgrößen  $P_{VRV}$  und den Weggrößen  $V_{VRV}$  an den Elementrändern her:

$$P_{VRV} = K_{VRV} \cdot V_{VRV}$$

Der Vektor  $P_{VRV}$  enthält sämtliche Kraftgrößen an den Elementrändern (vgl. Bild 4-9), während der Vektor  $V_{VRV}$  alle 14 Knotenweggrößen beinhaltet:

$$P_{VRV} = \begin{pmatrix} N_A \\ Q_A \\ N_B \\ Q_B \\ N_C \\ Q_C \\ M_C \\ N_D \\ Q_D \\ M_D \\ N_E \\ Q_E \\ N_F \\ Q_F \end{pmatrix} \quad V_{VRV} = \begin{pmatrix} u_A \\ w_A \\ u_B \\ w_B \\ u_C \\ w_C \\ \varphi_C \\ u_D \\ w_D \\ \varphi_D \\ u_E \\ w_E \\ u_F \\ w_F \end{pmatrix}$$

Die vollständige Steifigkeitsmatrix  $K_{VRV}$  ist auf der folgenden Doppelseite dargestellt.

$$K_{\text{VRV}} = \begin{pmatrix} \Lambda + (B + C) k_1^2 & 0 & \Gamma k_1^2 + \Xi & 0 & \Delta k_1 & 0 \\ 0 & \gamma - \alpha k_1^2 & 0 & \delta - \beta k_1^2 & 0 & \epsilon k_1 \\ \Gamma k_1^2 + \Xi & 0 & \Lambda + (B + C) k_1^2 & 0 & (\Omega + Z) k_1 & 0 \\ 0 & \delta - \beta k_1^2 & 0 & \gamma - \alpha k_1^2 & 0 & \zeta k_1 \\ \Delta k_1 & 0 & (\Omega + Z) k_1 & 0 & \Pi & 0 \\ 0 & \epsilon k_1 & 0 & \zeta k_1 & 0 & \iota + \theta \\ 0 & -\epsilon k_1 & 0 & \eta k_1 & 0 & \kappa + \varphi \\ (\Omega + Z) k_1 & 0 & \Delta k_1 & 0 & \Theta & 0 \\ 0 & \zeta k_1 & 0 & \epsilon k_1 & 0 & \mu - \nu \\ 0 & -\eta k_1 & 0 & \epsilon k_1 & 0 & \omega - \rho \\ (B + C) k_1 k_2 - \gamma & 0 & T + \Gamma k_1 k_2 & 0 & \Delta k_2 & 0 \\ 0 & -\gamma - \alpha k_1 k_2 & 0 & -\delta - \beta k_1 k_2 & 0 & \epsilon k_2 \\ T + \Gamma k_1 k_2 & 0 & (B + C) k_1 k_2 - \gamma & 0 & (\Omega + Z) k_2 & 0 \\ 0 & -\delta - \beta k_1 k_2 & 0 & -\gamma - \alpha k_1 k_2 & 0 & \zeta k_2 \end{pmatrix}$$

$$\lambda = \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{EA}}$$

$$C = \frac{\lambda EA \coth(\lambda l)}{(k_1 + k_2)^2}$$

$$B = -\frac{EA}{l (k_1 + k_2)^2}$$

$$\Lambda = \frac{l (k_2^2 + k_1 k_2) k_1}{3 (k_1 + k_2)^2}$$

$$\Xi = \frac{k_1 (l^2 k_2^2 + k_1 l^2 k_2 + 6 EA k_1)}{6 l (k_1 + k_2)^2}$$

$$\Gamma = -\frac{\lambda EA}{\sinh(\lambda l) (k_1 + k_2)^2}$$

$$\Delta = -\frac{EA (\lambda l \coth(\lambda l) - 1)}{l (k_1 + k_2)}$$

$$\Omega = \frac{\lambda EA}{\sinh(\lambda l) (k_1 + k_2)}$$

$$Z = -\frac{EA}{l (k_1 + k_2)}$$

$$\Pi = \sqrt{EA} \coth(\lambda l) \sqrt{k_1 + k_2}$$

$$\Theta = -\frac{\sqrt{EA} \sqrt{k_1 + k_2}}{\sinh(\lambda l)}$$

$$T = -\frac{k_1 k_2 (l^2 k_1 - 6 EA + l^2 k_2)}{6 l (k_1 + k_2)^2}$$

$$\Upsilon = \frac{k_2 (l^2 k_1^2 + k_2 l^2 k_1 + 6 EA k_2)}{6 l (k_1 + k_2)^2}$$

$$\Phi = \frac{l (k_1^2 + k_2 k_1) k_2}{3 (k_1 + k_2)^2}$$

$$\Psi = -\frac{l k_1 k_2}{3 k_1 + 3 k_2}$$

$$a = \sqrt[4]{\frac{k_1 + k_2}{4 EI}}$$

$$n = a l$$

$$m = \cos(2n) + \cosh(2n) - 2$$

$$\gamma = \frac{l k_1 k_2}{3 k_1 + 3 k_2}$$

$$\delta = \frac{l k_1 k_2}{6 k_1 + 6 k_2}$$

$$\begin{pmatrix}
0 & (\Omega + Z) k_1 & 0 & 0 & (B + C) k_1 k_2 - \gamma & 0 & T + \Gamma k_1 k_2 & 0 \\
-\varepsilon k_1 & 0 & \zeta k_1 & -\eta k_1 & 0 & -\gamma - \alpha k_1 k_2 & 0 & -\delta - \beta k_1 k_2 \\
0 & \Delta k_1 & 0 & 0 & T + \Gamma k_1 k_2 & 0 & (B + C) k_1 k_2 - \gamma & 0 \\
\eta k_1 & 0 & \epsilon k_1 & \varepsilon k_1 & 0 & -\delta - \beta k_1 k_2 & 0 & -\gamma - \alpha k_1 k_2 \\
0 & \Theta & 0 & 0 & \Delta k_2 & 0 & (\Omega + Z) k_2 & 0 \\
\kappa + \varphi & 0 & \mu - \nu & \omega - \rho & 0 & \epsilon k_2 & 0 & \zeta k_2 \\
\varsigma + \tau & 0 & \rho - \omega & \phi + v & 0 & -\varepsilon k_2 & 0 & \eta k_2 \\
0 & \Pi & 0 & 0 & (\Omega + Z) k_2 & 0 & \Delta k_2 & 0 \\
\rho - \omega & 0 & \iota + \theta & \psi + p & 0 & \zeta k_2 & 0 & \epsilon k_2 \\
\phi + v & 0 & \psi + p & \varsigma + \tau & 0 & -\eta k_2 & 0 & \varepsilon k_2 \\
0 & (\Omega + Z) k_2 & 0 & 0 & \Phi + (B + C) k_2^2 & 0 & \Gamma k_2^2 + \Upsilon & 0 \\
-\varepsilon k_2 & 0 & \zeta k_2 & -\eta k_2 & 0 & \gamma - \alpha k_2^2 & 0 & \delta - \beta k_2^2 \\
0 & \Delta k_2 & 0 & 0 & \Gamma k_2^2 + \Upsilon & 0 & \Phi + (B + C) k_2^2 & 0 \\
\eta k_2 & 0 & \epsilon k_2 & \varepsilon k_2 & 0 & \delta - \beta k_2^2 & 0 & \gamma - \alpha k_2^2
\end{pmatrix}$$

$$\epsilon = -\frac{\cos(2n) - \cosh(2n) + 2n \sin(2n) + 2n \sinh(2n) - 4 \sin(n) \sinh(n)}{2 a m n}$$

$$\varepsilon = \frac{(\cos(n) - \cosh(n)) (\sin(n) + \sinh(n) - n \cos(n) - n \cosh(n))}{a^2 m n}$$

$$\zeta = \frac{\cos(2n) - \cosh(2n) - 4 \sinh(n) (\sin(n) - n \cos(n)) + 4 n \cosh(n) \sin(n)}{2 a m n}$$

$$\eta = \frac{\frac{\sin(2n)}{2} + \sinh(n) (\cos(n) + 2n \sin(n)) - \cosh(n) (\sin(n) + \sinh(n))}{a^2 m n}$$

$$\theta = \frac{(k_1 + k_2) \left( 6 \cosh(2n) (\sin(2n) + \sinh(2n)) - 32 n \sin(n)^2 \sinh(n)^2 + 6 (\cos(2n) - 2) (\sin(2n) + \sinh(2n)) \right)}{8 a m^2}$$

$$\iota = \frac{EI a^3 \left( 16 n \sin(n)^2 \sinh(n)^2 + \cosh(2n) (\sin(2n) + \sinh(2n)) + (\cos(2n) - 2) (\sin(2n) + \sinh(2n)) \right)}{m^2}$$

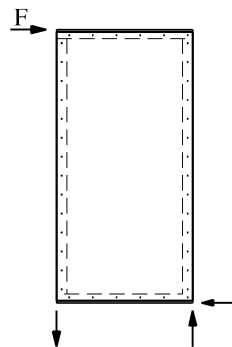
$$\kappa = \frac{(k_1 + k_2) \left( 8 n \sin(2n) \sinh(n)^2 - 8 n \sinh(2n) \sin(n)^2 + 4 \cos(2n) - \cos(4n) - 4 \cosh(2n) + \cosh(4n) \right)}{8 a^2 m^2}$$

$$\varphi = \frac{EI a^2 \left( 8 n \sinh(2n) \sin(n)^2 - 8 n \sin(2n) \sinh(n)^2 + 4 \cos(2n) - \cos(4n) - 4 \cosh(2n) + \cosh(4n) \right)}{2 m^2}$$

$$\begin{aligned}
\alpha &= \frac{\sin(2n) - \sinh(2n) + 2 \cos(n) \sinh(n) - 2 \cosh(n) \sin(n) + n (\cosh(2n) + 4 \sin(n) \sinh(n) - n (\sin(2n) + \sinh(2n))) - n \cos(2n)}{a m n^2 (k_1 + k_2)} \\
\beta &= \frac{\sinh(2n) - \sin(2n) + 2 \sinh(n) (\cos(n) (n^2 - 1) - 2n \sin(n)) + n \cosh(2n) - n \cosh(n) \sin(n) (n^2 + 1)}{a m n^2 (k_1 + k_2)} \\
\mu &= - \frac{(k_1 + k_2) (3 \cosh(n) (\sin(3n) - 4 \sin(n)) + \sinh(n) (3 \cos(3n) - 12 \cos(n) + 2n \sin(3n)) + 3 \cosh(3n) \sin(n) + \sinh(3n) (3 \cos(n) - 2n \sin(n)))}{4 a m^2} \\
\nu &= \frac{\text{EI } a^3 (\cosh(n) (\sin(3n) - 4 \sin(n)) - \sinh(n) (4 \cos(n) - \cos(3n) + 2n \sin(3n)) + \cosh(3n) \sin(n) + \sinh(3n) (\cos(n) + 2n \sin(n)))}{m^2} \\
\rho &= \frac{(k_1 + k_2) (\sinh(n) (12 \sin(n) - 2 \sin(3n) + 2n \cos(n) + n \cos(3n)) - \sinh(3n) (2 \sin(n) + n \cos(n)) - n \cosh(n) (\sin(3n) - 2 \sin(n)) + n \cosh(3n) \sin(n))}{4 a^2 m^2} \\
\omega &= \frac{\text{EI } a^2 (\sinh(n) (2 \sin(3n) - 12 \sin(n) + n (\cos(3n) + 2 \cos(n))) + \sinh(3n) (2 \sin(n) - n \cos(n)) - n \cosh(n) (\sin(3n) - 2 \sin(n)) + n \cosh(3n) \sin(n))}{m^2} \\
\varsigma &= \frac{(k_1 + k_2) (4 \sin(2n) - \sin(4n) + \sinh(4n) + 2 \sinh(2n) (\cos(2n) + 4n \sin(2n) - 2) - 2 \cosh(2n) (4n + \sin(2n)) + 8n \cos(2n))}{16 a^3 m^2} \\
\tau &= \frac{\text{EI } a (12 \sin(2n) - 3 \sin(4n) + 3 \sinh(4n) + \cosh(2n) (8n - 6 \sin(2n)) - 2 \sinh(2n) (4n \sin(2n) - 3 \cos(2n) + 6) - 8n \cos(2n))}{4 m^2} \\
\nu &= - \frac{(k_1 + k_2) (\cosh(n) (4 \sin(n) - \sin(3n) + 2n \cos(3n)) - \cosh(3n) (\sin(n) + 2n \cos(n)) + \sinh(n) (\cos(3n) + \cos(n) (2 \cosh(2n) - 3) + 16n \sin(n)))}{8 a^3 m^2} \\
\phi &= \frac{\text{EI } a (\sinh(n) (12 \cos(n) - 3 \cos(3n) + 16n \sin(n)) + \cosh(n) (3 \sin(3n) - 12 \sin(n) + 2n \cos(3n)) - 3 \sinh(3n) \cos(n) + \cosh(3n) (3 \sin(n) - 2n \cos(n)))}{2 m^2} \\
p &= - \frac{(k_1 + k_2) (8n \sin(2n) \sinh(n)^2 - 8n \sinh(2n) \sin(n)^2 + 4 \cos(2n) - \cos(4n) - 4 \cosh(2n) + \cosh(4n))}{8 a^2 m^2} \\
\psi &= - \frac{\text{EI } a^2 (8n \sinh(2n) \sin(n)^2 - 8n \sin(2n) \sinh(n)^2 + 4 \cos(2n) - \cos(4n) - 4 \cosh(2n) + \cosh(4n))}{2 m^2}
\end{aligned}$$

## Anhang D - Tafel mit starren Rippen als ideales Schubfeld

Für die in Bild D-1 dargestellte Wandtafel wird im Folgenden die Berechnung der Verbundbeanpruchungen  $s_0$  und  $s_{90}$  sowie der Normalkraft-, Querkraft- und Biegemomentenverläufe in den Rippen mit dem in Abschnitt 3.4.3 beschriebenen Weggrößenverfahren gezeigt.



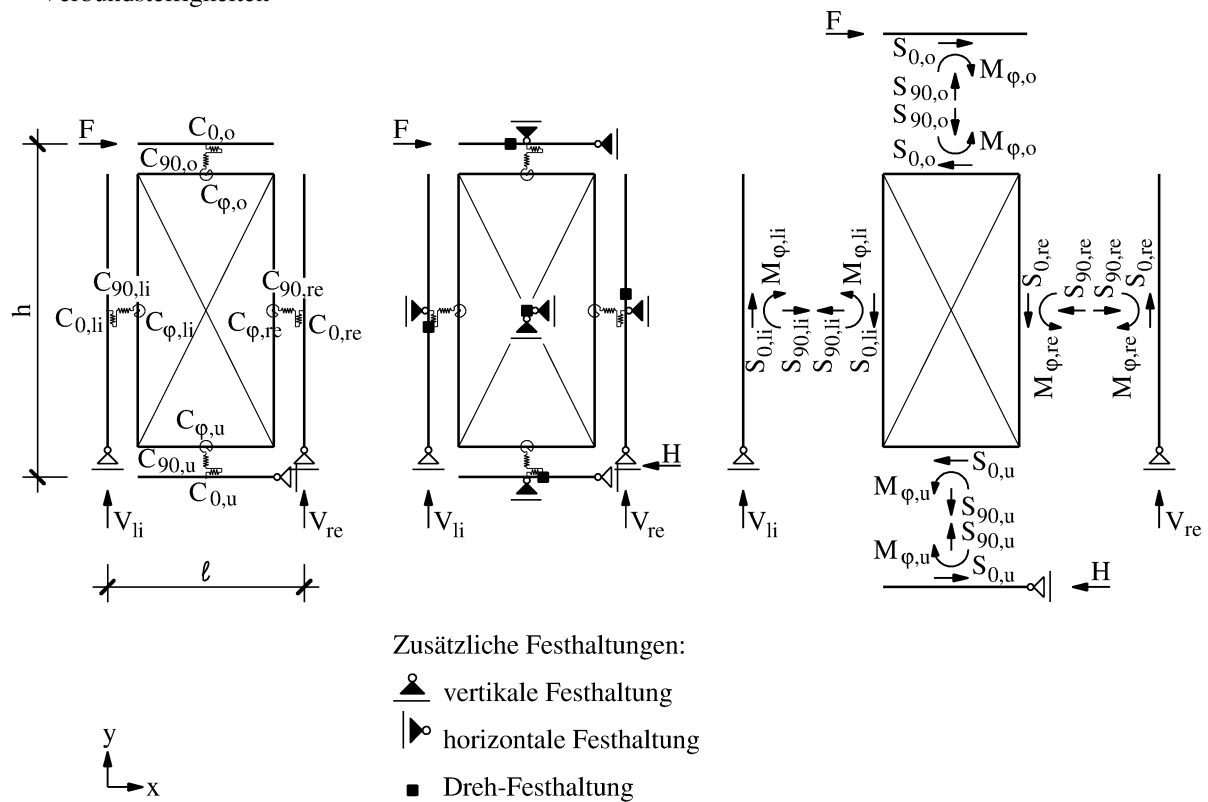
**Bild D-1:** Tafel mit vier starren Rippen, die nicht miteinander verbunden sind, und einer starren Platte (ideales Schubfeld)

Die Tafel besteht aus vier nicht direkt miteinander verbundenen starren Rippen und einer starren Platte, deren Plattenränder kontinuierlich mit den Rippen verbunden sind. Dieser kontinuierliche Verbund besteht aus stabförmigen Verbindungsmitteln im Abstand  $a_v$  und mit dem Verschiebungsmodul  $K$ . Zunächst wird die kinematische Bestimmtheit untersucht: Da die Rippen untereinander nicht verbunden sind, besitzt jede Rippe drei Freiheitsgrade. Die Platte besitzt ebenfalls drei Freiheitsgrade. Drei dieser insgesamt 15 Freiheitsgrade sind durch die Lagerbedingungen der Tafel festgehalten. Folglich ist die Tafel 12-fach kinematisch unbestimmt. Durch Einführung von zwölf zusätzlichen Festhaltungen, die in Bild D-2b schwarz dargestellt sind, erhält man das kinematisch bestimmte Hauptsystem. Die äußere Last  $F$  erzeugt am kinematisch bestimmten Hauptsystem keine Verschiebungen und somit keine Schnittgrößen.

a) Statisches Modell mit resultierenden Verbundsteifigkeiten

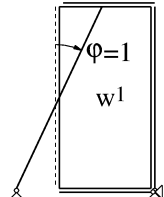
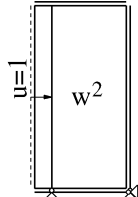
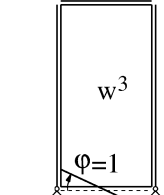
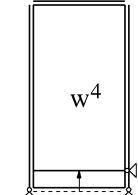
b) Kinematisch bestimmtes  
Hauptsystem

c) Freigeschnittene resultierende Verbundbeanspruchungen

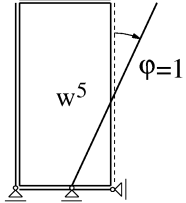
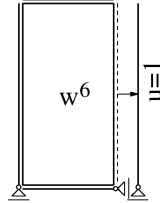
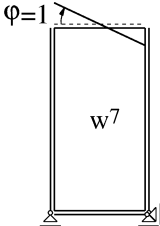
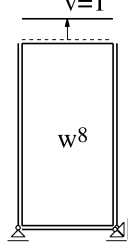
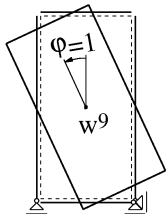
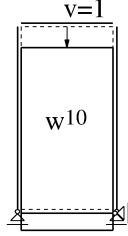


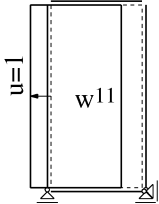
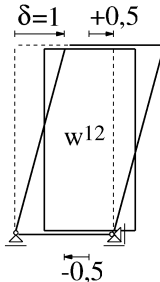
**Bild D-2:** Modellierung der Tafel aus Bild D-1

Nun werden zwölf Einheitsverschiebungszustände  $w^i$  angesetzt und die daraus folgenden resultierenden Verbundschnittgrößen berechnet:

	$M_{\varphi,li}^1 = C_{\varphi,li} \cdot 1 \text{ rad} = \frac{Kh^3}{12a_v}$		$S_{90,li}^2 = C_{90,li} \cdot 1 = \frac{Kh}{a_v}$
	$M_{\varphi,u}^3 = C_{\varphi,u} \cdot 1 \text{ rad} = \frac{K\ell^3}{12a_v}$		$S_{90,u}^4 = C_{90,u} \cdot 1 = \frac{K\ell}{a_v}$



 $M_{\varphi, \text{re}}^5 = C_{\varphi, \text{re}} \cdot 1 \text{ rad} = \frac{Kh^3}{12a_v}$	 $S_{90, \text{re}}^6 = C_{90, \text{re}} \cdot 1 = \frac{Kh}{a_v}$
 $M_{\varphi, o}^7 = C_{\varphi, o} \cdot 1 \text{ rad} = \frac{K\ell^3}{12a_v}$	 $S_{90, o}^8 = C_{90, o} \cdot 1 = \frac{K\ell}{a_v}$
 $M_{\varphi, o}^9 = C_{\varphi, o} \cdot 1 \text{ rad} = \frac{K\ell^3}{12a_v}$ $M_{\varphi, u}^9 = C_{\varphi, u} \cdot 1 \text{ rad} = \frac{K\ell^3}{12a_v}$ $M_{\varphi, \text{li}}^9 = C_{\varphi, \text{li}} \cdot 1 \text{ rad} = \frac{Kh^3}{12a_v}$ $M_{\varphi, \text{re}}^9 = C_{\varphi, \text{re}} \cdot 1 \text{ rad} = \frac{Kh^3}{12a_v}$ $S_{0, o}^9 = C_{0, o} \cdot \frac{h}{2} = \frac{K\ell h}{2a_v}$ $S_{0, u}^9 = C_{0, u} \cdot \left(-\frac{h}{2}\right) = -\frac{K\ell h}{2a_v}$ $S_{0, \text{li}}^9 = C_{0, \text{li}} \cdot \frac{\ell}{2} = \frac{K\ell h}{2a_v}$ $S_{0, \text{re}}^9 = C_{0, \text{re}} \cdot \left(-\frac{\ell}{2}\right) = -\frac{K\ell h}{2a_v}$	 $S_{90, o}^{10} = C_{90, o} \cdot 1 = \frac{K\ell}{a_v}$ $S_{90, u}^{10} = C_{90, u} \cdot 1 = \frac{K\ell}{a_v}$ $S_{0, \text{re}}^{10} = C_{0, \text{re}} \cdot 1 = \frac{Kh}{a_v}$ $S_{0, \text{li}}^{10} = C_{0, \text{li}} \cdot 1 = \frac{Kh}{a_v}$

 $S_{90,li}^{11} = C_{90,li} \cdot 1 = \frac{Kh}{a_v}$ $S_{90,re}^{11} = C_{90,re} \cdot 1 = \frac{Kh}{a_v}$ $S_{0,o}^{11} = C_{0,o} \cdot 1 = \frac{K\ell}{a_v}$ $S_{0,u}^{11} = C_{0,u} \cdot 1 = \frac{K\ell}{a_v}$	 $M_{\varphi,re}^{12} = C_{\varphi,re} \cdot \frac{1}{h} = \frac{Kh^2}{12a_v}$ $M_{\varphi,li}^{12} = C_{\varphi,li} \cdot \frac{1}{h} = \frac{Kh^2}{12a_v}$ $S_{0,o}^{12} = C_{0,o} \cdot \frac{1}{2} = \frac{K\ell}{2a_v}$ $S_{0,u}^{12} = C_{0,u} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{K\ell}{2a_v}$
---	---

Aus der Forderung, dass die Summe aller Kräfte bzw. Momente in jeder der zwölf zusätzlich aufgebrachten Festhaltungen Null werden muss, folgt ein lineares Gleichungssystem mit zwölf Gleichungen, das die Faktoren  $\gamma_i$  der Einheitsverformungszustände  $w^i$  als Unbekannte enthält:

$$\begin{aligned}
\gamma_1 \mathbf{M}_{\varphi,li}^1 + \gamma_9 \mathbf{M}_{\varphi,li}^9 + \gamma_{12} \mathbf{M}_{\varphi,li}^{12} &= 0 \\
\gamma_2 \mathbf{S}_{90,li}^2 + \gamma_{11} \mathbf{S}_{90,li}^{11} &= 0 \\
\gamma_3 \mathbf{M}_{\varphi,u}^3 + \gamma_9 \mathbf{M}_{\varphi,u}^9 &= 0 \\
\gamma_4 \mathbf{S}_{90,u}^4 + \gamma_{10} \mathbf{S}_{90,u}^{10} &= 0 \\
\gamma_5 \mathbf{M}_{\varphi,re}^5 + \gamma_9 \mathbf{M}_{\varphi,re}^9 + \gamma_{12} \mathbf{M}_{\varphi,re}^{12} &= 0 \\
\gamma_6 \mathbf{S}_{90,re}^6 + \gamma_{11} \mathbf{S}_{90,re}^{11} &= 0 \\
\gamma_7 \mathbf{M}_{\varphi,o}^7 + \gamma_9 \mathbf{M}_{\varphi,o}^9 &= 0 \\
\gamma_8 \mathbf{S}_{90,o}^8 + \gamma_{10} \mathbf{S}_{90,o}^{10} &= 0 \\
\gamma_1 \mathbf{M}_{\varphi,li}^1 + \gamma_3 \mathbf{M}_{\varphi,u}^3 + \gamma_5 \mathbf{M}_{\varphi,re}^5 + \gamma_7 \mathbf{M}_{\varphi,o}^7 \\
&+ \gamma_9 \left( \mathbf{M}_{\varphi,li}^9 + \mathbf{M}_{\varphi,u}^9 + \mathbf{M}_{\varphi,re}^9 + \mathbf{M}_{\varphi,o}^9 + (\mathbf{S}_{0,li}^9 - \mathbf{S}_{0,re}^9) \frac{\ell}{2} + (\mathbf{S}_{0,o}^9 - \mathbf{S}_{0,u}^9) \frac{h}{2} \right) \\
&+ \gamma_{10} (\mathbf{S}_{0,re}^{10} - \mathbf{S}_{0,li}^{10}) \frac{\ell}{2} + \gamma_{11} (\mathbf{S}_{0,o}^{11} - \mathbf{S}_{0,u}^{11}) \frac{h}{2} + \gamma_{12} \left( \mathbf{M}_{\varphi,li}^{12} + \mathbf{M}_{\varphi,re}^{12} + (\mathbf{S}_{0,o}^{12} - \mathbf{S}_{0,u}^{12}) \frac{h}{2} \right) = 0 \\
\gamma_4 \mathbf{S}_{90,u}^4 + \gamma_8 \mathbf{S}_{90,o}^8 + \gamma_9 (\mathbf{S}_{0,li}^9 + \mathbf{S}_{0,re}^9) + \gamma_{10} (\mathbf{S}_{90,o}^{10} + \mathbf{S}_{90,u}^{10} + \mathbf{S}_{0,li}^{10} + \mathbf{S}_{0,re}^{10}) &= 0 \\
\gamma_2 \mathbf{S}_{90,li}^2 + \gamma_6 \mathbf{S}_{90,re}^6 + \gamma_9 (\mathbf{S}_{0,o}^9 + \mathbf{S}_{0,u}^9) + \gamma_{11} (\mathbf{S}_{90,li}^{11} + \mathbf{S}_{90,re}^{11} + \mathbf{S}_{0,o}^{11} + \mathbf{S}_{0,u}^{11}) + \gamma_{12} (\mathbf{S}_{0,o}^{12} + \mathbf{S}_{0,u}^{12}) &= 0 \\
\gamma_1 \frac{\mathbf{M}_{\varphi,li}^1}{h} + \gamma_5 \frac{\mathbf{M}_{\varphi,re}^5}{h} + \gamma_9 \left( \frac{\mathbf{M}_{\varphi,li}^9}{h} + \frac{\mathbf{M}_{\varphi,re}^9}{h} + 0,5 \cdot \mathbf{S}_{0,o}^9 - 0,5 \cdot \mathbf{S}_{0,u}^9 \right) \\
&+ \gamma_{11} (0,5 \cdot \mathbf{S}_{0,o}^{11} - 0,5 \cdot \mathbf{S}_{0,u}^{11}) + \gamma_{12} \left( \frac{\mathbf{M}_{\varphi,li}^{12}}{h} + \frac{\mathbf{M}_{\varphi,re}^{12}}{h} + 0,5 \cdot \mathbf{S}_{0,o}^{12} - 0,5 \cdot \mathbf{S}_{0,u}^{12} \right) + F \cdot 1 = 0
\end{aligned}$$

Das Gleichungssystem lässt sich übersichtlicher in Matrix-Vektor-Schreibweise mit der Koeffizientenmatrix  $k$ , dem Vektor  $\gamma$  der unbekannten Faktoren und dem Lösungsvektor  $r$  darstellen:

$$k \cdot \gamma = r \quad \Rightarrow \quad \gamma = k^{-1} \cdot r$$

$$k = \frac{K}{a_v} \begin{pmatrix} \frac{h^3}{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{h^3}{12} & 0 & 0 & \frac{h^2}{12} \\ 0 & h & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & h & 0 \\ 0 & 0 & \frac{l^3}{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{l^3}{12} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & l & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & l & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{h^3}{12} & 0 & 0 & 0 & \frac{h^3}{12} & 0 & 0 & \frac{h^2}{12} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & h & 0 & 0 & 0 & 0 & h & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{l^3}{12} & 0 & \frac{l^3}{12} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & l & 0 & l & 0 & 0 \\ \frac{h^3}{12} & 0 & \frac{l^3}{12} & 0 & \frac{h^3}{12} & 0 & \frac{l^3}{12} & 0 & \frac{(h+l)^3}{6} & 0 & 0 & \frac{h(h+3l)}{6} \\ 0 & 0 & 0 & l & 0 & 0 & 0 & l & 0 & 2h+2l & 0 & 0 \\ 0 & h & 0 & 0 & 0 & h & 0 & 0 & 0 & 0 & 2h+2l & 0 \\ \frac{h^2}{12} & 0 & 0 & 0 & \frac{h^2}{12} & 0 & 0 & 0 & \frac{h(h+3l)}{6} & 0 & 0 & \frac{h}{6} + \frac{l}{2} \end{pmatrix}$$

$$r = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -F \end{pmatrix}$$

Die Lösung des Gleichungssystems liefert die Faktoren  $\gamma_i$  der Einheitsverschiebungszustände  $w^i$ :

$$\gamma = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \\ \gamma_4 \\ \gamma_5 \\ \gamma_6 \\ \gamma_7 \\ \gamma_8 \\ \gamma_9 \\ \gamma_{10} \\ \gamma_{11} \\ \gamma_{12} \end{pmatrix} = \frac{a_v}{K} \begin{pmatrix} \frac{2F}{hl} \\ 0 \\ -\frac{2F}{l^2} \\ 0 \\ \frac{2F}{hl} \\ 0 \\ -\frac{2F}{l^2} \\ 0 \\ \frac{2F}{l^2} \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{2F(h^2+lh)}{hl^2} \end{pmatrix}$$

Durch die Superposition aller  $\gamma_i \cdot w^i$  erhält man die allgemeine Lösung für die Verbundschnittgrößen der Tafel:

$$S_{0,li} = S_{0,li}^9 \cdot \gamma_9 + S_{0,li}^{10} \cdot \gamma_{10} = \frac{Fh}{\ell} \quad S_{90,li} = S_{90,li}^2 \cdot \gamma_2 + S_{90,li}^{11} \cdot \gamma_{11} = 0$$

$$S_{0,re} = S_{0,re}^9 \cdot \gamma_9 + S_{0,re}^{10} \cdot \gamma_{10} = -\frac{Fh}{\ell} \quad S_{90,re} = S_{90,re}^6 \cdot \gamma_6 + S_{90,re}^{11} \cdot \gamma_{11} = 0$$

$$S_{0,o} = S_{0,o}^9 \cdot \gamma_9 + S_{0,o}^{11} \cdot \gamma_{11} + S_{0,o}^{12} \cdot \gamma_{12} = -F \quad S_{90,o} = S_{90,o}^8 \cdot \gamma_8 + S_{90,o}^{10} \cdot \gamma_{10} = 0$$

$$\begin{aligned}
S_{0,u} &= S_{0,o}^9 \cdot \gamma_9 + S_{0,o}^{11} \cdot \gamma_{11} + S_{0,o}^{12} \cdot \gamma_{12} = F & S_{90,u} &= S_{90,u}^4 \cdot \gamma_4 + S_{90,u}^{10} \cdot \gamma_{10} = 0 \\
M_{\varphi,li} &= M_{\varphi,li}^1 \cdot \gamma_1 + M_{\varphi,li}^9 \cdot \gamma_9 + M_{\varphi,li}^{12} \cdot \gamma_{12} = 0 & M_{\varphi,o} &= M_{\varphi,o}^7 \cdot \gamma_7 + M_{\varphi,o}^9 \cdot \gamma_9 = 0 \\
M_{\varphi,re} &= M_{\varphi,re}^5 \cdot \gamma_5 + M_{\varphi,re}^9 \cdot \gamma_9 + M_{\varphi,re}^{12} \cdot \gamma_{12} = 0 & M_{\varphi,u} &= M_{\varphi,u}^3 \cdot \gamma_3 + M_{\varphi,u}^9 \cdot \gamma_9 = 0
\end{aligned}$$

Wie erwartet, wird der Verbund ausschließlich parallel zu den Plattenrändern beansprucht. Der elastische Grenzzustand der Tafel ist erreicht, wenn die längenbezogene Verbundbeanspruchung  $s$  an einer Stelle die längenbezogene Verbundbeanspruchbarkeit

$$f_v = \frac{R}{a_v}$$

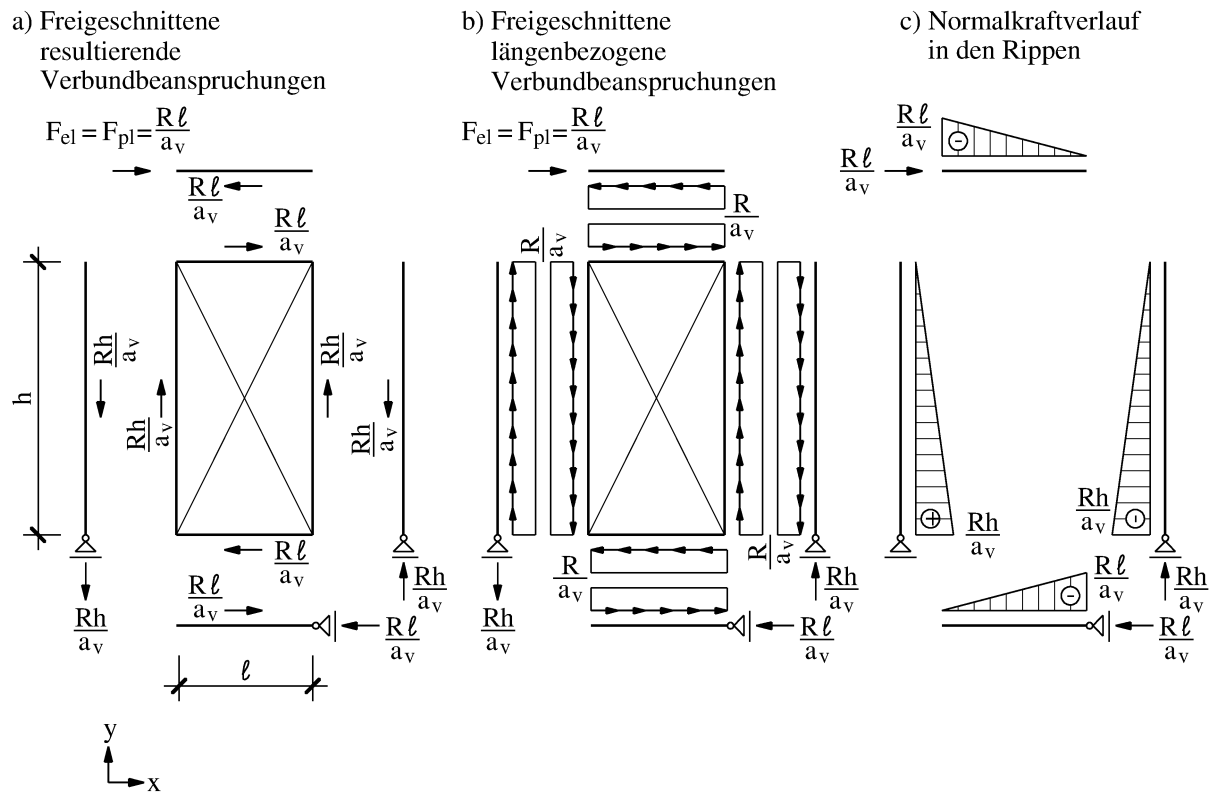
erreicht, die sich aus der Verbindungsmittelbeanspruchbarkeit  $R$  und dem Verbindungsmittelabstand  $a_v$  ergibt. Da die längenbezogene Verbundbeanspruchbarkeit hier einem umlaufend konstanten Schubfluss  $s_0$  entspricht (Bild D-3b), beträgt die an der Kopfrippe angreifende elastische Grenzlast

$$F_{el} = f_{v,0} \cdot \ell = \frac{R\ell}{a_v}.$$

Infolge des konstanten Schubflusses  $s_0$  erreichen sämtliche Verbindungsmittel gleichzeitig ihre Fließgrenze, so dass die aufnehmbare Last  $F_{pl}$  im plastischen Grenzzustand gleich der elastischen Grenzlast  $F_{el}$  ist:

$$F_{pl} = \frac{R\ell}{a_v}.$$

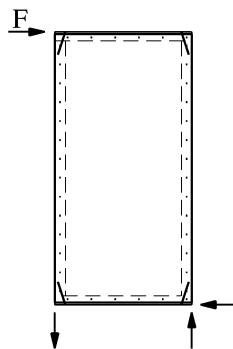
Die Verbundbeanspruchungen und die Normalkraftverläufe in den Rippen im elastischen und damit auch im plastischen Grenzzustand sind in Bild D-3 dargestellt.



**Bild D-3:** Freigeschnittene Verbundbeanspruchungen der Tafel aus Bild D-1 im elastischen und plastischen Grenzzustand

## Anhang E - Tafel mit gelenkig verbundenen starren Rippen

Die in Bild E-1 dargestellte Wandtafel entspricht der Wandtafel aus Abschnitt 3.4.4 bzw. Anhang D mit dem Unterschied, dass die Rippen hier an ihren Enden miteinander Verbunden sind. Diese Verbindungen können z. B. mit schräg eingebrachten Holzschrauben hergestellt werden und ermöglichen eine direkte Kraftübertragung von Rippe zu Rippe. Die einwirkende Last  $F$  wird dann teils direkt über die Rippenverbindungen teils indirekt über den Verbund und die Beplankung in die Auflager geleitet.

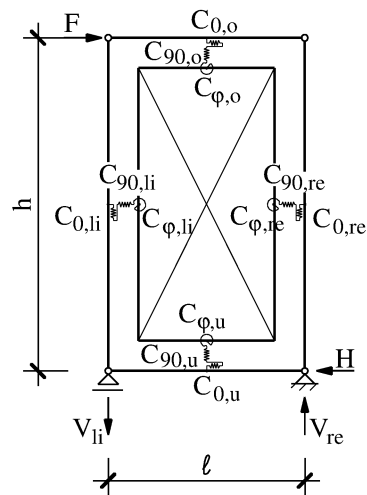


**Bild E-1:** Tafel mit vier starren Rippen, die gelenkig miteinander verbunden sind, und einer starren Platte

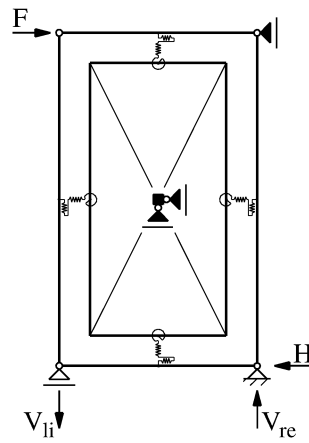
Obwohl die Tafel äußerlich statisch bestimmt ist, können die Verbundbeanspruchungen und die Schnittgrößen in den Rippen nicht mehr allein aus dem Gleichgewicht bestimmt werden, da die gelenkigen Verbindungen der Rippen untereinander eine innere statische Unbestimmtheit bewirken.

Das vereinfachte statische Modell der Tafel ist in Bild E-2 dargestellt. Wegen der gelenkigen Verbindungen der Rippen untereinander können sich die Rippen nur parallelogrammartig gemeinsam verschieben. Mit der starren Lagerung der Fußrippe bleibt den Rippen nur ein einziger horizontaler Verschiebungsfreiheitsgrad. Die Beplankung, welche hier aus einer einzelnen starren Platte besteht, ist mit allen vier Rändern über den nachgiebigen Verbund an die Rippen angeschlossen. Demnach kann sie in x- und in y-Richtung verschoben und um die z-Achse verdreht werden. Insgesamt besitzt die Tafel somit nur vier Freiheitsgrade, d. h. sie ist vierfach kinematisch unbestimmt.

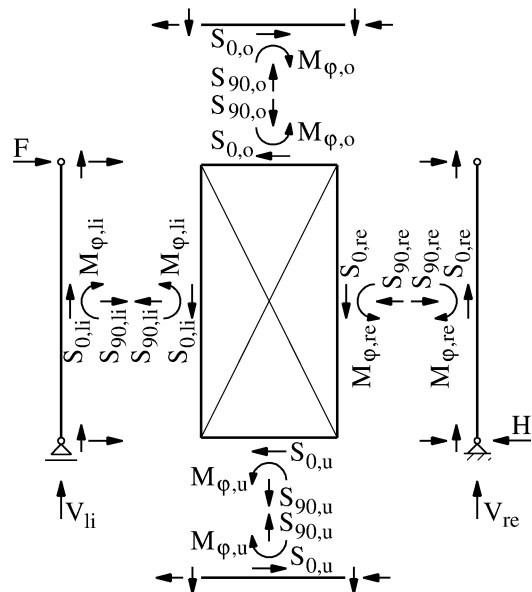
a) Statisches Modell mit resultierenden Verbundsteifigkeiten



b) Kinematisch bestimmtes Hauptsystem



c) Freigeschnittene resultierende Verbundbeanspruchungen



Zusätzliche Festhaltungen:

- vertikale Festhaltung
- horizontale Festhaltung
- Dreh-Festhaltung

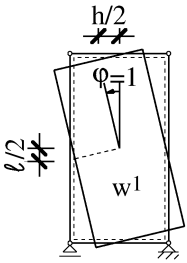
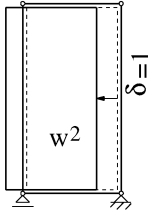
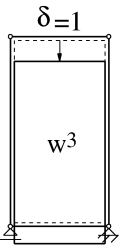
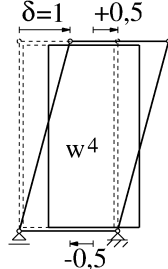


**Bild E-2:** Tafel mit vier starren Rippen, die gelenkig miteinander verbunden sind, und einer starren Platte

Durch die vier in Bild E-2b dargestellten zusätzlichen Festhaltungen, erhält man das kinematisch bestimmte Hauptsystem.



Nun werden vier Einheitsverschiebungszustände  $w^i$  angesetzt und die daraus folgenden resultierenden Verbundschnittgrößen bestimmt:

 $M_{\varphi,o}^1 = C_{\varphi,o} \cdot 1 \text{ rad} = \frac{K\ell^3}{12a_v}$ $M_{\varphi,u}^1 = C_{\varphi,u} \cdot 1 \text{ rad} = \frac{K\ell^3}{12a_v}$ $M_{\varphi,li}^1 = C_{\varphi,li} \cdot 1 \text{ rad} = \frac{Kh^3}{12a_v}$ $M_{\varphi,re}^1 = C_{\varphi,re} \cdot 1 \text{ rad} = \frac{Kh^3}{12a_v}$ $S_{0,o}^1 = C_{0,o} \cdot \frac{h}{2} = \frac{K\ell h}{2a_v}$ $S_{0,u}^1 = C_{0,u} \cdot \left(-\frac{h}{2}\right) = -\frac{K\ell h}{2a_v}$ $S_{0,li}^1 = C_{0,li} \cdot \frac{\ell}{2} = \frac{K\ell h}{2a_v}$ $S_{0,re}^1 = C_{0,re} \cdot \left(-\frac{\ell}{2}\right) = -\frac{K\ell h}{2a_v}$	 $S_{90,li}^2 = C_{90,li} \cdot 1 = \frac{Kh}{a_v}$ $S_{90,re}^2 = C_{90,re} \cdot 1 = \frac{Kh}{a_v}$ $S_{0,o}^2 = C_{0,o} \cdot 1 = \frac{K\ell}{a_v}$ $S_{0,u}^2 = C_{0,u} \cdot 1 = \frac{K\ell}{a_v}$
 $S_{90,o}^3 = C_{90,o} \cdot 1 = \frac{K\ell}{a_v}$ $S_{90,u}^3 = C_{90,u} \cdot 1 = \frac{K\ell}{a_v}$ $S_{0,re}^3 = C_{0,re} \cdot 1 = \frac{Kh}{a_v}$ $S_{0,li}^3 = C_{0,li} \cdot 1 = \frac{Kh}{a_v}$	 $M_{\varphi,re}^4 = C_{\varphi,re} \cdot \frac{1}{h} = \frac{Kh^2}{12a_v}$ $M_{\varphi,li}^4 = C_{\varphi,li} \cdot \frac{1}{h} = \frac{Kh^2}{12a_v}$ $S_{0,o}^4 = C_{0,o} \cdot \frac{1}{2} = \frac{K\ell}{2a_v}$ $S_{0,u}^4 = C_{0,u} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{K\ell}{2a_v}$

Aus der Forderung, dass die Summe aller Kräfte bzw. Momente in jeder der vier zusätzlich aufgebrachten Festhaltungen Null werden muss, folgt ein lineares Gleichungssystem mit vier Gleichungen, das die Faktoren  $\gamma_i$  der Einheitsverformungszustände  $w^i$  als Unbekannte enthält:

$$\begin{aligned}
& \gamma_1 \left( \mathbf{M}_{\phi,li}^1 + \mathbf{M}_{\phi,u}^1 + \mathbf{M}_{\phi,re}^1 + \mathbf{M}_{\phi,o}^1 + (\mathbf{S}_{0,li}^1 - \mathbf{S}_{0,re}^1) \frac{\ell}{2} + (\mathbf{S}_{0,o}^1 - \mathbf{S}_{0,u}^1) \frac{h}{2} \right) \\
& + \gamma_2 (\mathbf{S}_{0,o}^2 - \mathbf{S}_{0,u}^2) \frac{h}{2} + \gamma_3 (\mathbf{S}_{0,re}^3 - \mathbf{S}_{0,li}^3) \frac{\ell}{2} + \gamma_4 \left( \mathbf{M}_{\phi,li}^4 + \mathbf{M}_{\phi,re}^4 + (\mathbf{S}_{0,o}^4 - \mathbf{S}_{0,u}^4) \frac{h}{2} \right) = 0 \\
& \gamma_1 (\mathbf{S}_{0,o}^1 + \mathbf{S}_{0,u}^1) + \gamma_2 (\mathbf{S}_{90,li}^2 + \mathbf{S}_{90,re}^2 + \mathbf{S}_{0,o}^2 + \mathbf{S}_{0,u}^2) + \gamma_4 (\mathbf{S}_{0,o}^4 + \mathbf{S}_{0,u}^4) = 0 \\
& \gamma_1 (\mathbf{S}_{0,li}^1 + \mathbf{S}_{0,re}^1) + \gamma_3 (\mathbf{S}_{90,o}^3 + \mathbf{S}_{90,u}^3 + \mathbf{S}_{0,li}^3 + \mathbf{S}_{0,re}^3) = 0 \\
& \gamma_1 \left( \frac{\mathbf{M}_{\phi,li}^1}{h} + \frac{\mathbf{M}_{\phi,re}^1}{h} + 0,5 \cdot \mathbf{S}_{0,o}^1 - 0,5 \cdot \mathbf{S}_{0,u}^1 \right) \\
& + \gamma_2 (0,5 \cdot \mathbf{S}_{0,o}^2 - 0,5 \cdot \mathbf{S}_{0,u}^2) + \gamma_4 \left( \frac{\mathbf{M}_{\phi,li}^4}{h} + \frac{\mathbf{M}_{\phi,re}^4}{h} + 0,5 \cdot \mathbf{S}_{0,o}^{12} - 0,5 \cdot \mathbf{S}_{0,u}^{12} \right) + F \cdot 1 = 0
\end{aligned}$$

In Matrix-Vektor-Schreibweise sieht das Gleichungssystem mit der Koeffizientenmatrix  $k$ , dem Vektor  $\gamma$  der unbekannten Faktoren und dem Lösungsvektor  $r$  wie folgt aus:

$$\mathbf{k} \cdot \gamma = \mathbf{r} \quad \Rightarrow \quad \gamma = \mathbf{k}^{-1} \cdot \mathbf{r}$$

$$k = \frac{K}{a_v} \begin{pmatrix} \frac{(h+l)^3}{6} & 0 & 0 & \frac{h(h+3l)}{6} \\ 0 & 2(h+l) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2(h+l) & 0 \\ \frac{h(h+3l)}{6} & 0 & 0 & \frac{h+3l}{6} \end{pmatrix} \quad r = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -F \end{pmatrix}$$

Die Lösung des Gleichungssystems liefert die Faktoren  $\gamma_i$  der Einheitsverschiebungszustände  $w^i$ :

$$\gamma = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \\ \gamma_4 \end{pmatrix} = \frac{a_v}{K} \begin{pmatrix} \frac{6 F h}{l^2 (3 h + l)} \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{6 F (h + l)^3}{l^2 (h + 3 l) (3 h + l)} \end{pmatrix}$$

Durch die Superposition aller  $\gamma_i \cdot w^i$  erhält man die allgemeine Lösung für die Verbundschnittgrößen der Tafel:

$$\begin{aligned}
\mathbf{S}_{0,li} &= \mathbf{S}_{0,li}^1 \cdot \gamma_1 + \mathbf{S}_{0,li}^3 \cdot \gamma_3 = \frac{3Fh^2}{\ell(3h + \ell)} & \mathbf{S}_{90,li} &= \mathbf{S}_{90,li}^2 \cdot \gamma_2 = 0 \\
\mathbf{S}_{0,re} &= \mathbf{S}_{0,re}^1 \cdot \gamma_1 + \mathbf{S}_{0,re}^3 \cdot \gamma_3 = -\frac{3Fh^2}{\ell(3h + \ell)} & \mathbf{S}_{90,re} &= \mathbf{S}_{90,re}^2 \cdot \gamma_2 = 0 \\
\mathbf{S}_{0,o} &= \mathbf{S}_{0,o}^1 \cdot \gamma_1 + \mathbf{S}_{0,o}^2 \cdot \gamma_2 + \mathbf{S}_{0,o}^4 \cdot \gamma_4 = -\frac{3F\ell}{h + 3\ell} & \mathbf{S}_{90,o} &= \mathbf{S}_{90,o}^3 \cdot \gamma_3 = 0
\end{aligned}$$

$$S_{0,u} = S_{0,u}^1 \cdot \gamma_1 + S_{0,u}^2 \cdot \gamma_2 + S_{0,u}^4 \cdot \gamma_4 = \frac{3F\ell}{h + 3\ell}$$

$$S_{90,u} = S_{90,u}^3 \cdot \gamma_3 = 0$$

$$M_{\varphi,li} = M_{\varphi,li}^1 \cdot \gamma_1 + M_{\varphi,li}^4 \cdot \gamma_4 = -\frac{Fh^2}{2(h + 3\ell)}$$

$$M_{\varphi,o} = M_{\varphi,o}^1 \cdot \gamma_1 = \frac{Fh\ell}{2(3h + \ell)}$$

$$M_{\varphi,re} = M_{\varphi,re}^1 \cdot \gamma_1 + M_{\varphi,re}^4 \cdot \gamma_4 = -\frac{Fh^2}{2(h + 3\ell)}$$

$$M_{\varphi,u} = M_{\varphi,u}^1 \cdot \gamma_1 = \frac{Fh\ell}{2(3h + \ell)}$$

Die resultierenden Verbundschnittgrößen und die Kräfte, die in den Gelenken von einer Rippe zur anderen übertragen werden müssen, sind in Bild E-3a dargestellt. Aus den resultierenden Verbundschnittgrößen  $M_{\varphi,i}$  und  $S_{0,i}$  können die längenbezogenen Verbundbeanspruchungen  $s_0$  parallel und  $s_{90}$  senkrecht zu den Plattenrändern bestimmt werden, wie in Bild E-3b gezeigt. Die maximale resultierende längenbezogene Verbundbeanspruchung  $s_{res,max}$  (Bild E-3c) ergibt sich demnach für eine Last  $F$ , die kleiner als die elastische Grenzlast  $F_{el}$  ist, jeweils an den Enden der Rippen zu

$$s_{res,max} = \sqrt{s_0^2 + s_{90}^2} = \sqrt{\left(\frac{3Fh}{(3h + \ell)\ell}\right)^2 + \left(\frac{3F}{(h + 3\ell)}\right)^2} = \frac{3F\gamma}{\alpha\beta\ell}$$

$$\text{mit } \alpha = 3h + \ell$$

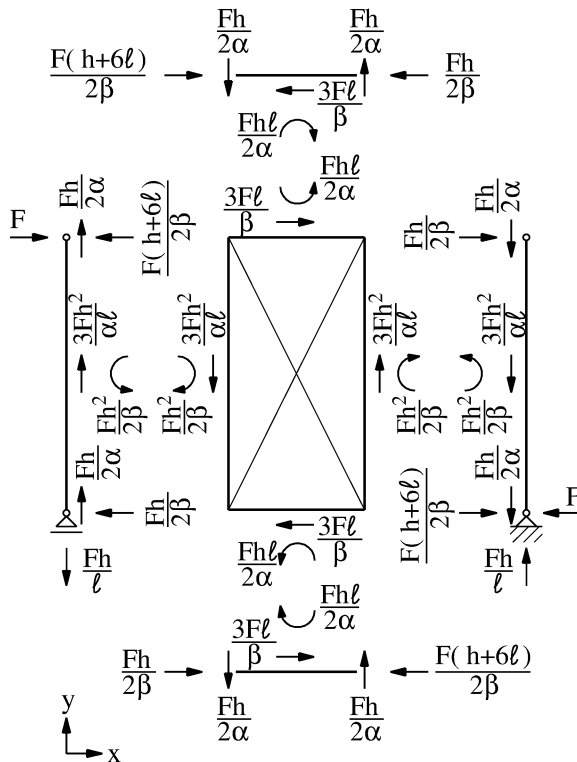
$$\beta = h + 3\ell$$

$$\gamma = \sqrt{h^4 + 6h^3\ell + 18h^2\ell^2 + 6h\ell^3 + \ell^4}$$

Die elastische Grenzlast  $F_{el}$  ist erreicht, wenn die maximale resultierende längenbezogene Verbundbeanspruchung  $s_{res,max}$  gleich der längenbezogenen Verbundbeanspruchbarkeit  $R/a_v$  ist:

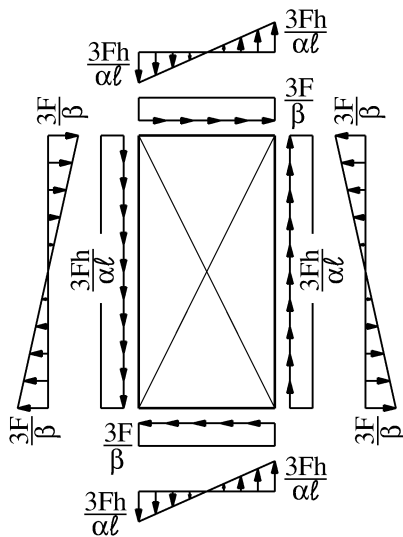
$$\frac{3F_{el}\gamma}{\alpha\beta\ell} = \frac{R}{a_v} \Rightarrow F_{el} = \frac{R}{a_v} \cdot \frac{\alpha\beta\ell}{3\gamma}$$

- a) Freigeschnittene  
resultierende  
Verbundbeanspruchungen  
und Gelenkkräfte

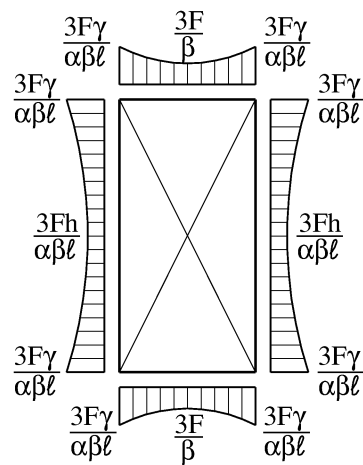


mit  $\alpha = 3h + l$   
 $\beta = h + 3l$   
 $\gamma = \sqrt{h^4 + 6h^3l + 18h^2l^2 + 6hl^3 + l^4}$

- b) Längenbezogene  
Verbundbeanspruchungen  
an den Plattenrändern



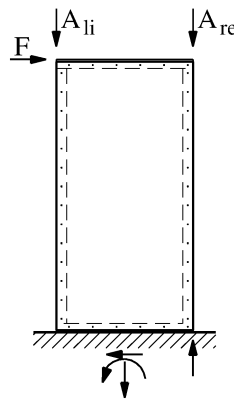
- c) Resultierende  
längenbezogene  
Verbundbeanspruchungen  
an den Plattenrändern



**Bild E-3:** Freigeschnittene Verbundbeanspruchungen und Gelenkkräfte der Tafel aus Bild E-2 mit elastischem Verbund

**Anhang F - Tafel mit starren Rippen ohne Zugverankerung**

Bild F-1 zeigt eine Wandtafel, die durch eine Horizontallast  $F$  und durch vertikale Auflasten  $A_{li}$  und  $A_{re}$  beansprucht wird und die keine Zugverankerungen besitzt.



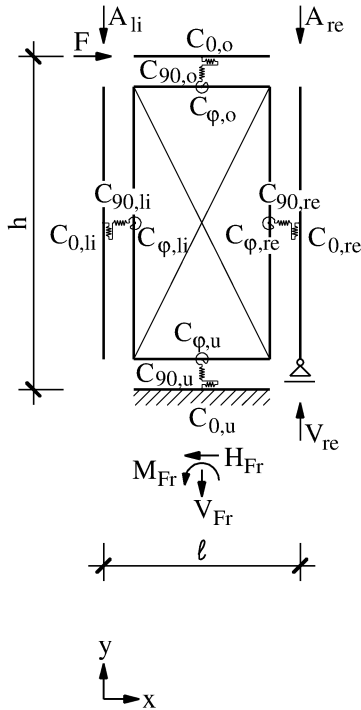
**Bild F-1:** Tafel ohne Zugverankerung der vertikalen Rippen

Wenn die linke Randrippe der Tafel infolge einer zu geringen Auflast  $A_{li}$  abhebt, kann der Verbund zwischen unterem Plattenrand und Fußrippe diesem Abheben entgegenwirken. Voraussetzung dafür ist, dass einerseits die Fußrippe mit der darunterliegenden Konstruktion, z. B. der Stahlbeton-Bodenplatte, nahezu kontinuierlich verbunden ist. Andererseits muss der Verbund zwischen Platte und Fußrippe neben den Beanspruchungen  $s_0$  parallel zum Plattenrand auch Beanspruchungen  $s_{90}$  senkrecht zum Plattenrand aufnehmen können.

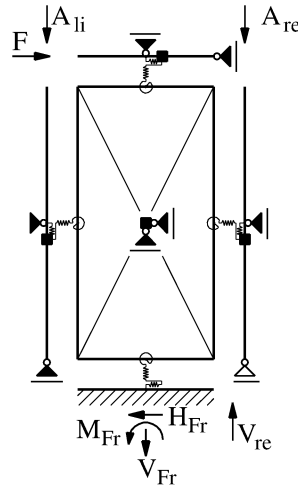
In Bild F-2a ist das statische Modell der Tafel aus Bild F-1 mit den resultierenden Verbundsteifigkeiten dargestellt. Infolge der fehlenden Zugverankerung entstehen in der Verbindung zwischen der Fußrippe und der darunter liegenden Konstruktion die resultierenden Auflagerreaktionen  $H_{Fr}$ ,  $V_{Fr}$  und  $M_{Fr}$ .

Die Kopfrippe, die linke Randrippe und die Platte besitzen je zwei Verschiebungsfreiheitsgrade und einen Verdrehungsfreiheitsgrad. Die rechte Randrippe ist vertikal gelagert und besitzt somit zwei kinematische Freiheitsgrade. Die Fußrippe ist starr gelagert. Insgesamt ist das statische Modell in Bild F-2a somit 11-fach kinematisch unbestimmt. Mit den in Bild F-2b schwarz dargestellten zusätzlichen Festhaltungen erhält man das kinematisch bestimmte Hauptsystem, mit welchem die resultierenden Verbundbeanspruchungen und die Auflagerreaktionen in Bild F-2c bestimmt werden können. Dazu kommt das in Abschnitt 3.4.3 beschriebene Weggrößenverfahren zur Anwendung.

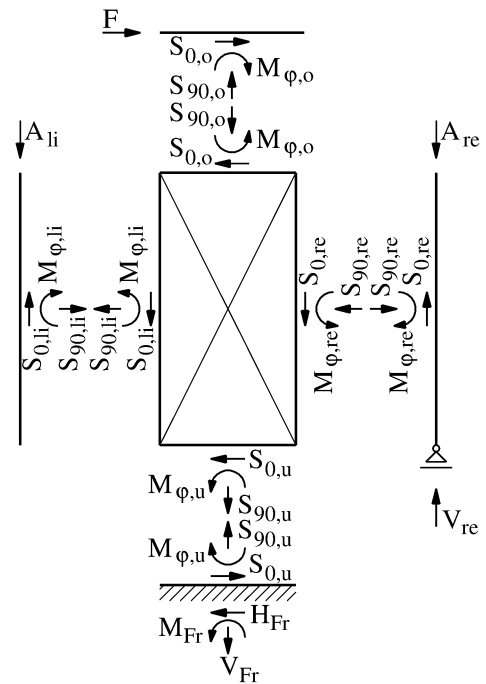
a) Statisches Modell mit resultierenden Verbundsteifigkeiten



b) Kinematisch bestimmtes Hauptsystem



c) Freigeschnittene resultierende Verbundbeanspruchungen



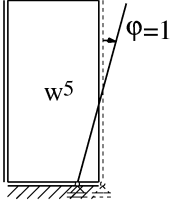


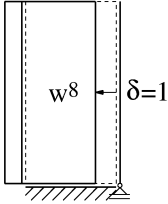
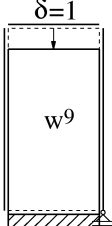
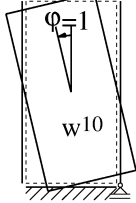
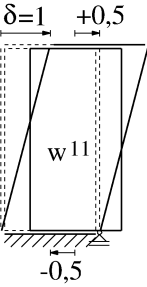
Zusätzliche Festhaltungen:

- vertikale Festhaltung
- horizontale Festhaltung
- Dreh-Festhaltung

**Bild F-2:** Modellierung der Tafel aus Bild F-1

Die elf Einheitsverschiebungszustände  $w^i$  und die daraus folgenden resultierenden Verbundchnittgrößen sind im Folgenden dargestellt:

$S_{0,li}^1 = C_{0,li} \cdot 1 = \frac{Kh}{a_v}$	$S_{90,li}^2 = C_{90,li} \cdot 1 = \frac{Kh}{a_v}$
$M_{\phi,li}^3 = C_{\phi,li} \cdot 1 \text{ rad} = \frac{Kh^3}{12a_v}$	$S_{90,re}^4 = C_{90,re} \cdot 1 = \frac{Kh}{a_v}$

 $M_{\varphi, \text{re}}^5 = C_{\varphi, \text{re}} \cdot 1 \text{ rad} = \frac{Kh^3}{12a_v}$	 $S_{90, o}^6 = C_{90, o} \cdot 1 = \frac{K\ell}{a_v}$
 $M_{\varphi, o}^7 = C_{\varphi, o} \cdot 1 \text{ rad} = \frac{K\ell^3}{12a_v}$	 $S_{90, \text{li}}^8 = C_{90, \text{li}} \cdot 1 = \frac{Kh}{a_v}$ $S_{90, \text{re}}^8 = C_{90, \text{re}} \cdot 1 = \frac{Kh}{a_v}$ $S_{0, o}^8 = C_{0, o} \cdot 1 = \frac{K\ell}{a_v}$ $S_{0, u}^8 = C_{0, u} \cdot 1 = \frac{K\ell}{a_v}$
 $S_{90, o}^9 = C_{90, o} \cdot 1 = \frac{K\ell}{a_v}$ $S_{90, u}^9 = C_{90, u} \cdot 1 = \frac{K\ell}{a_v}$ $S_{0, \text{re}}^9 = C_{0, \text{re}} \cdot 1 = \frac{Kh}{a_v}$ $S_{0, \text{li}}^9 = C_{0, \text{li}} \cdot 1 = \frac{Kh}{a_v}$	 $M_{\varphi, o}^{10} = C_{\varphi, o} \cdot 1 \text{ rad} = \frac{K\ell^3}{12a_v}$ $M_{\varphi, u}^{10} = C_{\varphi, u} \cdot 1 \text{ rad} = \frac{K\ell^3}{12a_v}$ $M_{\varphi, \text{li}}^{10} = C_{\varphi, \text{li}} \cdot 1 \text{ rad} = \frac{Kh^3}{12a_v}$ $M_{\varphi, \text{re}}^{10} = C_{\varphi, \text{re}} \cdot 1 \text{ rad} = \frac{Kh^3}{12a_v}$ $S_{0, o}^{10} = C_{0, o} \cdot \frac{h}{2} = \frac{K\ell h}{2a_v}$ $S_{0, u}^{10} = C_{0, u} \cdot \left(-\frac{h}{2}\right) = -\frac{K\ell h}{2a_v}$ $S_{0, \text{li}}^{10} = C_{0, \text{li}} \cdot \frac{\ell}{2} = \frac{K\ell h}{2a_v}$ $S_{0, \text{re}}^{10} = C_{0, \text{re}} \cdot \left(-\frac{\ell}{2}\right) = -\frac{K\ell h}{2a_v}$
 $M_{\varphi, \text{re}}^{11} = C_{\varphi, \text{re}} \cdot \frac{1}{h} = \frac{Kh^2}{12a_v}$ $M_{\varphi, \text{li}}^{11} = C_{\varphi, \text{li}} \cdot \frac{1}{h} = \frac{Kh^2}{12a_v}$ $S_{0, o}^{11} = C_{0, o} \cdot \frac{1}{2} = \frac{K\ell}{2a_v}$ $S_{0, u}^{11} = C_{0, u} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{K\ell}{2a_v}$	

Aus der Forderung, dass die Summe aller Kräfte bzw. Momente in jeder der elf zusätzlich aufgebrachten Festhaltungen Null werden muss, folgt ein lineares Gleichungssystem mit elf Gleichungen, das die Faktoren  $\gamma_i$  der Einheitsverformungszustände  $w^i$  als Unbekannte enthält:

$$\begin{aligned}
&\gamma_1 S_{0,li}^1 + \gamma_9 S_{0,li}^9 + \gamma_{10} S_{0,li}^{10} = A_{li} \\
&\gamma_2 S_{90,li}^2 + \gamma_8 S_{90,li}^8 = 0 \\
&\gamma_3 M_{\varphi,li}^3 + \gamma_{10} M_{\varphi,li}^{10} + \gamma_{11} M_{\varphi,li}^{11} = 0 \\
&\gamma_4 S_{90,re}^4 + \gamma_8 S_{90,u}^8 = 0 \\
&\gamma_5 M_{\varphi,re}^5 + \gamma_{10} M_{\varphi,re}^{10} + \gamma_{11} M_{\varphi,re}^{11} = 0 \\
&\gamma_6 S_{90,o}^6 + \gamma_9 S_{90,o}^9 = 0 \\
&\gamma_7 M_{\varphi,o}^7 + \gamma_{10} M_{\varphi,o}^{10} = 0 \\
&\gamma_2 S_{90,li}^2 + \gamma_4 S_{90,re}^4 + \gamma_8 (S_{90,li}^8 + S_{90,re}^8 + S_{0,o}^8 + S_{0,u}^8) + \gamma_{10} (S_{0,o}^{10} + S_{0,u}^{10}) + \gamma_{11} (S_{0,o}^{11} + S_{0,u}^{11}) = 0 \\
&\gamma_1 S_{0,li}^1 + \gamma_6 S_{90,o}^6 + \gamma_9 (S_{90,o}^9 + S_{90,u}^9 + S_{0,li}^9 + S_{0,re}^9) + \gamma_{10} (S_{0,li}^{10} + S_{0,re}^{10}) = 0 \\
&\gamma_1 S_{0,li}^1 \frac{\ell}{2} + \gamma_3 M_{\varphi,li}^3 + \gamma_5 M_{\varphi,re}^5 + \gamma_7 M_{\varphi,o}^7 + \gamma_8 (S_{0,o}^8 - S_{0,u}^8) \frac{h}{2} + \gamma_9 (S_{0,li}^9 - S_{0,re}^9) \frac{\ell}{2} \\
&\quad + \gamma_{10} \left( M_{\varphi,li}^{10} + M_{\varphi,u}^{10} + M_{\varphi,re}^{10} + M_{\varphi,o}^{10} + (S_{0,li}^{10} - S_{0,re}^{10}) \frac{\ell}{2} + (S_{0,o}^{10} - S_{0,u}^{10}) \frac{h}{2} \right) \\
&\quad + \gamma_{11} \left( M_{\varphi,li}^{11} + M_{\varphi,re}^{11} + (S_{0,o}^{11} - S_{0,u}^{11}) \frac{h}{2} \right) = 0 \\
&\gamma_3 \frac{M_{\varphi,li}^3}{h} + \gamma_5 \frac{M_{\varphi,re}^5}{h} + \gamma_8 (0,5 \cdot S_{0,o}^8 - 0,5 \cdot S_{0,u}^8) + \gamma_{10} \left( \frac{M_{\varphi,li}^{10}}{h} + \frac{M_{\varphi,re}^{10}}{h} + 0,5 \cdot S_{0,o}^{10} - 0,5 \cdot S_{0,u}^{10} \right) \\
&\quad + \gamma_{11} \left( \frac{M_{\varphi,li}^{11}}{h} + \frac{M_{\varphi,re}^{11}}{h} + 0,5 \cdot S_{0,o}^{11} - 0,5 \cdot S_{0,u}^{11} \right) = -F
\end{aligned}$$

Das Gleichungssystem lässt sich übersichtlicher in Matrix-Vektor-Schreibweise mit der Koeffizientenmatrix  $k$ , dem Vektor  $\gamma$  der unbekannten Faktoren und dem Lösungsvektor  $r$  darstellen:

$$k \cdot \gamma = r \quad \Rightarrow \quad \gamma = k^{-1} \cdot r$$

$$k = \frac{K}{a_v} \begin{pmatrix} h & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & h & \frac{hl}{2} & 0 \\ 0 & h & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & h & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{h^3}{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{h^3}{12} & \frac{h^2}{12} \\ 0 & 0 & 0 & h & 0 & 0 & 0 & h & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{h^3}{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{h^3}{12} & \frac{h^2}{12} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & l & 0 & 0 & l & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{l^3}{12} & 0 & 0 & \frac{l^3}{12} & 0 \\ 0 & h & 0 & h & 0 & 0 & 0 & 2h+2l & 0 & 0 & 0 \\ h & 0 & 0 & 0 & 0 & l & 0 & 0 & 2h+2l & 0 & 0 \\ \frac{hl}{2} & 0 & \frac{h^3}{12} & 0 & \frac{h^3}{12} & 0 & \frac{l^3}{12} & 0 & 0 & \frac{(h+l)^3}{6} & \frac{h(h+3l)}{6} \\ 0 & 0 & \frac{h^2}{12} & 0 & \frac{h^2}{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{h(h+3l)}{6} & \frac{h}{6} + \frac{l}{2} \end{pmatrix}$$



$$r = \begin{pmatrix} A_{li} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -F \end{pmatrix} \quad \gamma = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \\ \gamma_4 \\ \gamma_5 \\ \gamma_6 \\ \gamma_7 \\ \gamma_8 \\ \gamma_9 \\ \gamma_{10} \\ \gamma_{11} \end{pmatrix} = \frac{a_v}{K} \begin{pmatrix} \frac{(2h+l)(6A_{li}hl-6Fh^2+A_{li}l^2)}{hl^2(4h+l)} \\ 0 \\ \frac{2F}{hl} \\ 0 \\ \frac{2F}{hl} \\ \frac{6A_{li}hl-6Fh^2+A_{li}l^2}{l^2(4h+l)} \\ -\frac{l(12Fh-12hA_{li})-6l^2A_{li}+12Fh^2}{l^3(4h+l)} \\ 0 \\ -\frac{6A_{li}hl-6Fh^2+A_{li}l^2}{l^2(4h+l)} \\ \frac{l(12Fh-12hA_{li})-6l^2A_{li}+12Fh^2}{l^3(4h+l)} \\ -\frac{l^2(8Fh-6hA_{li})+12Fh^3+2Fl^3-l(12h^2A_{li}-12Fh^2)}{l^3(4h+l)} \end{pmatrix}$$

Durch die Superposition aller  $\gamma_i \cdot w^i$  erhält man die allgemeine Lösung für die resultierenden Verbundschnittgrößen der Tafel:

$$S_{0,li} = S_{0,li}^1 \cdot \gamma_1 + S_{0,li}^9 \cdot \gamma_9 + S_{0,li}^{10} \cdot \gamma_{10} = A_{li}$$

$$S_{90,li} = S_{90,li}^2 \cdot \gamma_2 + S_{90,li}^8 \cdot \gamma_8 = 0$$

$$S_{0,re} = S_{0,re}^9 \cdot \gamma_9 + S_{0,re}^{10} \cdot \gamma_{10} = -\frac{2h(3Fh - \ell A_{li})}{\ell(4h + \ell)}$$

$$S_{90,re} = S_{90,re}^4 \cdot \gamma_4 + S_{90,re}^8 \cdot \gamma_8 = 0$$

$$S_{0,o} = S_{0,o}^8 \cdot \gamma_8 + S_{0,o}^{10} \cdot \gamma_{10} + S_{0,o}^{11} \cdot \gamma_{11} = -F$$

$$S_{90,o} = S_{90,o}^6 \cdot \gamma_6 + S_{90,o}^9 \cdot \gamma_9 = 0$$

$$S_{0,u} = S_{0,u}^8 \cdot \gamma_8 + S_{0,u}^{10} \cdot \gamma_{10} + S_{0,u}^{11} \cdot \gamma_{11} = F$$

$$S_{90,u} = S_{90,u}^9 \cdot \gamma_9 = \frac{2h(3Fh - \ell A_{li})}{\ell(4h + \ell)} - A_{li}$$

$$M_{\varphi,li} = M_{\varphi,li}^3 \cdot \gamma_3 + M_{\varphi,li}^{10} \cdot \gamma_{10} + M_{\varphi,li}^{11} \cdot \gamma_{11} = 0$$

$$M_{\varphi,o} = M_{\varphi,o}^7 \cdot \gamma_7 + M_{\varphi,o}^{10} \cdot \gamma_{10} = 0$$

$$M_{\varphi,re} = M_{\varphi,re}^5 \cdot \gamma_5 + M_{\varphi,re}^{10} \cdot \gamma_{10} + M_{\varphi,re}^{11} \cdot \gamma_{11} = 0$$

$$M_{\varphi,u} = M_{\varphi,u}^{10} \cdot \gamma_{10} = \frac{h(h + \ell)}{4h + \ell} F - \frac{\ell(2h + \ell)}{2(4h + \ell)} A_{li}$$

Die resultierenden Verbundschnittgrößen sind in Bild F-3a dargestellt. Aus den resultierenden Verbundschnittgrößen  $S_{0,i}$ ,  $S_{90,i}$  und  $M_{\varphi,i}$  können die längenbezogenen Verbundbeanspruchungen  $s_0$  parallel und  $s_{90}$  senkrecht zu den Plattenrändern bestimmt werden. Am unteren Plattenrand beträgt die maximale längenbezogene Verbundbeanspruchung  $s_{90,u,max}$  senkrecht zum Plattenrand

$$s_{90,u,max} = \frac{6M_{\varphi,u}}{\ell^2} + \frac{S_{90,u}}{\ell} = \frac{6h(2h + \ell)}{\ell^2(4h + \ell)} F - \frac{4(3h + \ell)}{\ell(4h + \ell)} A_{li}.$$

In Bild F-3b wird diese an der linken unteren Plattenecke erreicht. An der rechten unteren Plattenecke beträgt die längenbezogene Verbundbeanspruchung  $s_{90,u, \text{re}}$  senkrecht zum Plattenrand

$$s_{90,u, \text{re}} = -\frac{6M_{\phi, u}}{\ell^2} + \frac{S_{90, u}}{\ell} = -\frac{6h}{\ell(4h + \ell)} F + \frac{2}{4h + \ell} A_{\text{li}}.$$

Die maximale resultierende längenbezogene Verbundbeanspruchung  $s_{\text{res}, \text{max}}$  ergibt sich aus der Überlagerung von  $s_0$  und  $s_{90, \text{max}}$  an der linken unteren Ecke der Platte:

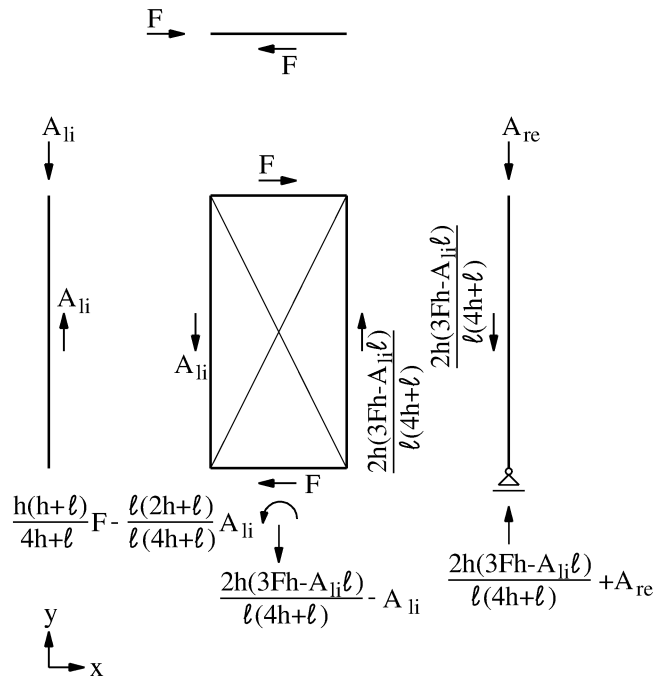
$$s_{\text{res}, \text{max}} = \sqrt{s_0^2 + s_{90, u, \text{max}}^2} = \sqrt{\left(\frac{F}{\ell}\right)^2 + \left(\frac{6h(2h + \ell)}{\ell^2(4h + \ell)} F - \frac{4(3h + \ell)}{\ell(4h + \ell)} A_{\text{li}}\right)^2}$$

Die elastische Grenzlasterlast  $F_{\text{el}}$  ist erreicht, wenn die maximale resultierende längenbezogene Verbundbeanspruchung  $s_{\text{res}, \text{max}}$  gleich der längenbezogenen Verbundbeanspruchbarkeit  $R/a_v$  ist:

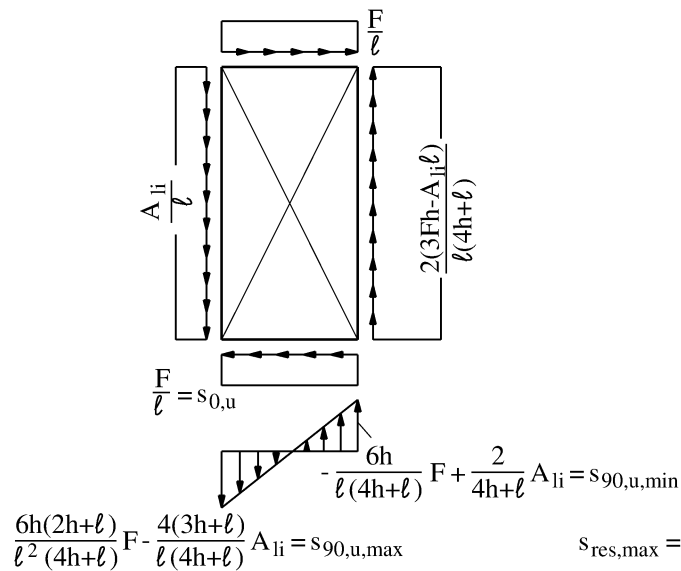
$$\sqrt{\left(\frac{F_{\text{el}}}{\ell}\right)^2 + \left(\frac{6h(2h + \ell)}{\ell^2(4h + \ell)} F_{\text{el}} - \frac{4(3h + \ell)}{\ell(4h + \ell)} A_{\text{li}}\right)^2} = \frac{R}{a_v}$$

Auflösen dieser Gleichung nach  $F_{\text{el}}$  liefert den sehr länglichen Ausdruck für die elastische Grenzlasterlast, der hier nicht dargestellt wird.

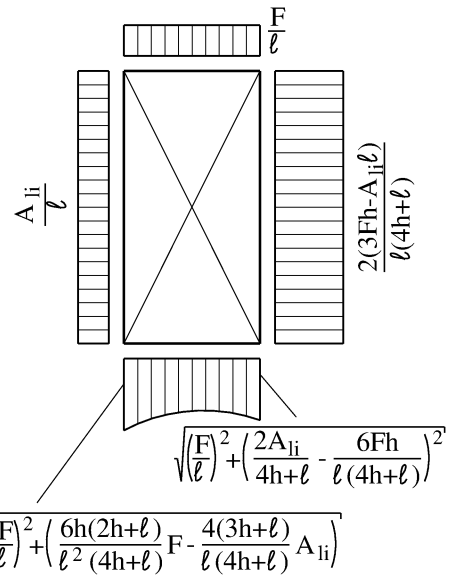
a) Freigeschnittene  
resultierende  
Verbundbeanspruchungen



b) Längenbezogene  
Verbundbeanspruchungen  
an den Plattenrändern



c) Resultierende  
längenbezogene  
Verbundbeanspruchungen  
an den Plattenrändern



**Bild F-3:** Freigeschnittene Verbundbeanspruchungen der Tafel aus Bild F-2 mit elastischem Verbund